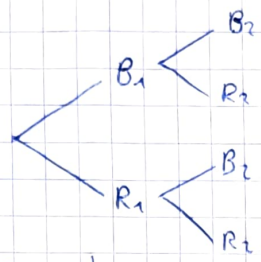
Julie
Oumâdevy
Sarah

TD 15 Probabilités sur un univers fini

Exercice 9 :

On note
B_k : "tirer une boule blanche au k^e tirage"
R_k : " rouge "



$$P(B_1) = \frac{b}{r+b}$$

$$P(R_1) = \frac{r}{r+b} = 1 - \frac{b}{r+b}$$

On note :
A_k : "probabilité de tirer exactement une boule blanche au k^e tirage et le reste que des boules rouges"

$$= R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_{k-1} \cap B_k \cap R_{k+1} \cap \dots \cap R_n$$

$$P(A_1) = \frac{b}{r+b} \times \left(\frac{r}{r+b-1}\right)^{n-1}$$

$$P(A_2) = \frac{r}{r+b} \times \frac{b}{r+b} \times \left(\frac{r}{r+b-1}\right)^{n-2}$$

$$P(A_4) = \left(\frac{r}{r+b}\right)^3 \times \frac{b}{r+b} \times \left(\frac{r}{r+b-1}\right)^{n-4}$$

$\vdots$

$$P(A_k) = \left(\frac{r}{r+b}\right)^{k-1} \times \frac{b}{r+b} \times \left(\frac{r}{r+b-1}\right)^{n-k}$$

avec $k \in [\![1, n]\!]$

À justifier avec F.P.C

Donc la probabilité d'obtenir exactement une boule blanche en n tirages :

$$* \quad p = \sum_{k=1}^{n} P(B_k) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{r}{r+b}\right)^{k-1} \times \frac{b}{r+b} \times \left(\frac{r}{r+b-1}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{b}{r+b} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{r}{r+b}\right)^{k} \times \left(\frac{r+b}{r}\right) \times \left(\frac{r}{r+b-1}\right)^{n} \times \left(\frac{r+b-1}{r}\right)^{k}$$

$$= \left(\frac{b}{r+b}\right)\left(\frac{r+b}{r}\right)\left(\frac{r}{r+b-1}\right)^{n} \sum_{k=1}^{n} \left[\left(\frac{r}{r+b}\right)\left(\frac{r+b-1}{r}\right)\right]^{k}$$

$$= \frac{b}{r}\left(\frac{r}{r+b-1}\right)^{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{r+b-1}{r+b}\right)^{k}$$

somme géométrique.

$$= \frac{b}{r}\left(\frac{r}{r+b-1}\right)^{n} \times \overbrace{\left(\frac{r+b-1}{r+b}\right) \times \frac{1-\left(\frac{r+b-1}{r+b}\right)^{n}}{1-\left(\frac{r+b-1}{r+b}\right)}}$$

$$= \frac{b}{r}\left(\frac{r}{r+b-1}\right)^{n} \times \left(\frac{r+b-1}{\cancel{r+b}}\right) \times \cancel{(r+b)}\left(1-\left(\frac{r+b-1}{r+b}\right)^{n}\right)$$

$$p = \frac{b}{r}\left(\frac{r}{r+b-1}\right)^{n} \times (r+b-1)\left(1-\left(\frac{r+b-1}{r+b}\right)^{n}\right)$$

T.B

* Car l'événement étudié est $\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$