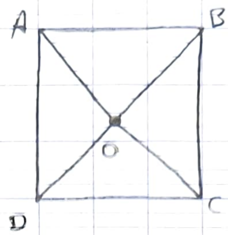
Kamil
Hugo
Nino

# TD 15

## Exercice 8 :




On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $(B_1, O_1, D_1)$ avec :

$B_1$ : le jeton va sur B au 1er pas

$O_1$ : ——————— O au 1er pas

$D_1$ : ——————— D au 1er pas.

* Soit $A_2$ : le jeton revient sur A au 2e pas.

$$\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}(A_2 \mid B_1) + \mathbb{P}(O_1) \times \mathbb{P}(A_2 \mid B_1) + \mathbb{P}(D_1) \times \mathbb{P}(A_2 \mid D_1)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{9}$$

$$= \frac{8}{36} + \frac{3}{36}$$

$$\mathbb{P}(A_2) = \frac{11}{36}$$

* Soit $B_2$ : le jeton va sur B au 2e pas

$$\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}(B_2 \mid B_1) + \mathbb{P}(O_1) \times \mathbb{P}(B_2 \mid O_1) + \mathbb{P}(D_1) \times \mathbb{P}(B_2 \mid D_1)$$

$$= \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times 0$$

$$= \frac{1}{12}$$

* Soit $C_2$ : le jeton arrive sur $C$ au $2^e$ pas.
Comme les 3 sommets $B$, $O$, $D$ permettent d'arriver sur $C$ comme sur $A$,
on en déduit que $\mathbb{P}(C_2) = \mathbb{P}(A_2)$

* Soit $D_2$ : le jeton arrive sur $D$ au $2^e$ pas.
Cela n'est possible que lorsque $O_1$ se produit, comme pour $B_2$,
On en déduit $\mathbb{P}(D_2) = \mathbb{P}(B_2)$

* Soit $O_2$ : le jeton arrive sur $O$ au $2^e$ pas.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(O_2) &= \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}(O_2 | B_1) + \mathbb{P}(O_1) \times \mathbb{P}(O_2 | O_1) + \mathbb{P}(D_1) \times \mathbb{P}(O_2 | D_1) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{9}\end{aligned}$$

2. Soit $O_3$ l'évènement : le jeton arrive en $O$ au $3^e$ pas.
On considère le s.c.e $(O_2, \overline{O_2})$.
On utilise la formule des proba totales sur ce s.c.e

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(O_3) &= \mathbb{P}(O_2) \times \mathbb{P}(O_3 | O_2) + \mathbb{P}(\overline{O_2}) \times \mathbb{P}(O_3 | \overline{O_2}) \\ &= 0 + (1 - \mathbb{P}(O_2)) \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{7}{9} \times \frac{1}{3}\end{aligned}$$

car différent de $O$.

$$\mathbb{P}(O_3) = \frac{7}{27}$$

3. Soit $O_{n+1}$ : le jeton arrive sur $O$ au $(n+1)^e$ pas
On considère le s.c.e $(O_n, \overline{O_n})$
On utilise la F.P.T sur ce s.c.e

$$\mathbb{P}(O_{n+1}) = \underbrace{\mathbb{P}(O_n)}_{= p_n} \times \underbrace{\mathbb{P}(O_{n+1} | O_n)}_{= 0} + \underbrace{\mathbb{P}(\overline{O_n})}_{= 1 - p_n} \times \underbrace{\mathbb{P}(O_{n+1} | \overline{O_n})}_{= \frac{1}{3}}$$

$\mathbb{P}(O_{n+1}) = p_{n+1} = (1-p_n) \times \frac{1}{3}$ ✓ $\forall n \in \mathbb{N}$.

4. $p_n$ est une suite arithmético-géométrique.
On cherche le point fixe tel que :
$\cancel{p_{n+1}} = \frac{1}{3}(1-l) = l$

$\Leftrightarrow \frac{4}{3} l = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow l = \frac{1}{4}$

On pose $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tq $U_n = p_n - l$

Donc $U_{n+1} = p_{n+1} - l$
$= \frac{1}{3}(1-p_n) - l$

$= \frac{1}{12} - \frac{1}{3}p_n$

$U_{n+1} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4} + p_n\right)$

$= -\frac{1}{3}\left(p_n - \frac{1}{4}\right)$

$U_{n+1} = -\frac{1}{3} U_n$

Donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{3}$

Ainsi $U_n = U_1 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

$U_1 = p_1 - l$
$= \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$
$= \frac{1}{12}$

Donc $U_n = \frac{1}{12} \times \left(\frac{-1}{3}\right)^n$ / $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Ainsi $p_n = v_n + \ell$

$p_n = \frac{1}{12} \times \left(\frac{-1}{3}\right)^n + \frac{1}{4}$

Ainsi $\lim_{n \to +\infty} p_n = \frac{1}{4}$

Car $\left|\frac{-1}{3}\right| < 1$ donc $\left(\frac{-1}{3}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$