Ex 6

1) Nombre de tirages possibles : $\binom{n}{2}$

A est le nombre de tirages avec exactement un billet gagnant : $\boxed{2} \times \underbrace{(n-2)}$

deux choix possible pour le billet gagnant

choisir parmi les billets restants.

ainsi comme $P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{2(n-2)}{\binom{n}{2}} = \frac{4(n-2)(n-2)!}{n!}$

$= \frac{4(n-2)}{n(n-1)}$

2) Nombre de tirages possibles : n^2

B est le nombre de tirages avec exactement un billet gagnant : $\underbrace{4(n-2)}$

L'ordre compte donc $\times 2$ par rapport au 1)

Donc $P(B) = \frac{4(n-2)}{n^2}$.

3) a) Mq $\forall n \geq 3$ $p_n - q_n = \frac{4(n-2)}{n^2(n-1)}$

$\forall n \geq 3$:

$$p_n - q_n = \frac{4(n-2)}{n(n-1)} - \frac{4(n-2)}{n^2}$$

$$= \frac{4(n-2)n - 4(n-1)(n-2)}{n^2(n-1)}$$

$$= \frac{4(n-2)}{n^2(n-1)}$$

3) b) Comme il y a au moins 3 billets dans l'urne et que $\forall n \geq 3$, $p_n - q_n = \frac{4(n-2)}{n^2(n-1)} > 0$

Ainsi $\forall n \geq 3$, $p_n - q_n > 0$

donc $\forall n \geq 3$, $p_n > q_n$ ainsi la première méthode est la plus favorable.

3) c) On résout :

$$\frac{4(n-2)}{n^2(n-1)} < 10^{-3}$$

$\frac{4}{n^2} < 10^{-3}$
(C.S mais pas C.N : celle-ci est plus simple à résoudre)

$\iff 4(n-2) - n^2(n-1) \times 10^{-3} < 0$ car $n^2(n-1) > 0$.

$\iff -10^{-3}n^3 + 10^{-3}n^2 + 4n - 8 < 0$

$\iff -n^3 + n^2 + 4000n - 8000 < 0$

3) a) Mq $\forall n \geqslant 3$ $p_n - q_n = \frac{4(n-2)}{n^2(n-1)}$

$\forall n \geqslant 3$:

$$p_n - q_n = \frac{4(n-2)}{n(n-1)} - \frac{4(n-2)}{n^2}$$

$$= \frac{4(n-2)n - 4(n-1)(n-2)}{n^2(n-1)}$$

$$= \frac{4(n-2)}{n^2(n-1)}$$

3) b) Comme il y a au moins 3 billets dans l'urne et que

$\forall n \geqslant 3$, $p_n - q_n = \frac{4(n-2)}{n^2(n-1)} > 0$

Ainsi $\forall n \geqslant 3$, $p_n - q_n > 0$

donc $\forall n \geqslant 3$, $p_n > q_n$ ainsi la première méthode est la plus favorable.

3) c) On résout :

$$\frac{4(n-2)}{n^2(n-1)} < 10^{-3}$$

$\frac{4}{n^2} < 10^{-3}$ (C.S mais pas C.N : celle-ci est plus simple à résoudre)

$\iff$ $4(n-2) - n^2(n-1) \times 10^{-3} < 0$ car $n^2(n-1) > 0$.

$\iff$ $-10^{-3}n^3 + 10^{-3}n^2 + 4n - 8 < 0$

$\iff$ $-n^3 + n^2 + 4000n - 8000 < 0$