CLAIN
Miguel
FABIEN
Maxime
ABDALLAH-COSTA
Kévin

Exercice 5 :

1.

$L_1 : 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \; \dots \; n$

$L_2 : 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \; \dots \; n$

Il y a $n!$ configurations possibles de match opposant L_1 et L_2

Déterminons le nombre de match possible du ~~type $L_1 \vee L_1 \vee L_2$~~ sans contrainte.

$L_1 : 1 \quad 2 \quad 3 \; \dots \; n$

$L_2 : 1 \quad 2 \quad 3 \; \dots \; n$

1^{er} match : $2n-1$ choix possibles
2^e match : $2n-3$

⋮

n^e match : 1

Donc $(2n-1)(2n-3)(2n-5)\dots$

Après simplification, il y a au total

$\frac{(2n)!}{2^n \times n!}$ match possible

Ainsi $p_n = n! \times \frac{1}{\frac{(2n)!}{2^n \times n!}} = \frac{2^n \times (n!)^2}{(2n)!}$

2. Si il y un nombre impair de match donc si $n = 2k+1$ alors ce n'est pas possible de répartir les matchs ✓

Dans le cas contraire on pose $n = 2k$ et à l'aide de la question 1
Pour L_1, il y a $\frac{(2k)!}{2^k \times k!}$ ✓ matchs possible

De même pour L_2

De plus le nombre de match total

est égale à $\frac{(4k)!}{2^{2k} \times (2k)!}$ ✓

ainsi $q_n = \dfrac{\left(\frac{(2k)!}{2^k \times k!}\right)^2}{\left(\frac{(4k)!}{2^{2k} \times (2k)!}\right)}$ ② → car L_1 et L_2 sont indépendants

donc $q_n = \dfrac{((2k)!)^2}{(4k)!} \times \dfrac{(2k)!}{((k)!)^2}$ ✓ $= \dfrac{\binom{2k}{k}}{\binom{4k}{2k}}$ ✓

3. On a $\binom{2n}{n} \leq \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = 2^{2n}$

donc $\binom{2n}{n} \leq 2^{2n}$ ✓