Correction Exercice 4 TD 15 Probabilités sur un univers fini

CHADJEE Radika
ALI Djannah

1 a) Il y a n boîtes et n boules on cherche le nombre de dispositions possibles.

1^{re} boule (n choix de boîtes)

2^e boule (n choix de boîtes)

⋮

n^e boule (n choix de boîtes).

au total

$$\underbrace{n \times n \times n \times \dots \times n}_{n \text{ fois}} = n^n.$$

1 b) 1^{re} boule (n choix)

2^e boule (n-1 choix)

⋮

n^e boule (1 choix)

Donc il y a $n!$ cas favorables pour que chaque boîte contient une boule.

Cette probabilité vaut $p_n = \dfrac{n!}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \dfrac{n!}{n^n}$.

2) Mq $\forall x \geq 0$ $(1+x)^n \geq 1+nx$.

On a

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k 1^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

$$= \binom{n}{0} x^0 + \binom{n}{1} x^1 + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^k}_{\geq 0}$$

donc $\boxed{(1+x)^n \geq 1+nx}$

3) Mq $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{p_n}{p_{n+1}} \geq 2$.

On a

$$\frac{p_n}{p_{n+1}} = \frac{n!}{n^n} \times \frac{(n+1)^{(n+1)}}{(n+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)^{(n+1)}}{n^n\,(n+1)}$$

$$= \frac{(n+1)^n}{n^n}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

D'après l'inégalité de Bernoulli on pose $x = \dfrac{1}{n}$ et on a

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{=} \geq 1 + n\times\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\boxed{\frac{p_n}{p_{n+1}} \geq 2.}$$

4) On a

$$p_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n}{n \times n \times n \times \dots \times n}$$

On a $0 \leq p_n \leq \dfrac{1}{n}$ (car tous les termes sont plus petits ou égaux à 1).

Et $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc d'après le théorème d'encadrement $\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = 0.}$