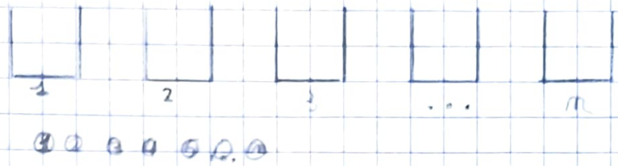
Le 03.02.26

Bewrier Loupas
Fondrat Johan

Exercice 4 :

1. a) Soit $n \geq 4$



On place une boule parmi n boîtes on a n choix
- On place la boule numéro 2 parmi les n boîtes on a n choix
⋮
- On place la boule numéro n parmi les n boîtes on a n choix.

On a donc $\underline{n^n}$ dispositions possibles.

b) Soit E_n : " chaque boîte contient exactement une boule"

On place la boule numéro 1 on a n choix
〃 〃 〃 〃 2 on a $n-1$ choix
...
On 〃 〃 〃 n on a $\underline{1}$ choix

Cela revient donc à faire une bijection on a alors $n!$ possibilités

$\boxed{P_n = \frac{n!}{n^n}}$ (le nb de possibilités pour E_n) / (le nb de possibilités totales)

2. Mq : $\forall x \geq 0, (1+x)^n \geq 1+nx$.

or d'après la formule du binôme : $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$

on enlève les 2 premiers termes de la somme :

$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^k$ or $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^k \geq 0$

donc $\underline{(1+x)^n \geq 1+nx}$

3. Mq $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{P_n}{P_{n+1}} \geq 2$

$\frac{P_n}{P_{n+1}} = \frac{\left(\frac{n!}{n^n}\right)}{\left(\frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}\right)} = \frac{n!}{n^n} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + \frac{1}{n} n$

$\underline{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2}$

4. D'après le théorème de croissance comparée $\lim_{n \to +\infty} P_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{n^n} = \underline{0}$

↳ vrai, mais ce résultat était à redémontrer.