

Colle 17 : Probabilités - Limites et continuité

Résultats et preuves à connaître

Proposition 1 Proposition

Si f et g ont une limite finie en $a \in \mathbb{R}$ et $f \leq g$ au voisinage de a alors $\lim_a f \leq \lim_a g$.

Proposition 2 Théorème de minoration/majoration

Si $f \leq g$ au voisinage de a , ($\in \overline{\mathbb{R}}$ mais on le prouvera uniquement pour $a \in \mathbb{R}$)

$$\lim_a f = +\infty \implies \lim_a g = +\infty$$

$$\lim_a g = -\infty \implies \lim_a f = -\infty$$

Proposition 3 Théorème de limite monotone

Soient $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$. (on ne démontrera que le premier point, et pour $b \in \mathbb{R}$)

• Si f est croissante et majorée sur $]a, b[$ alors $\lim_{b^-} f$ existe et vaut $\sup_{]a, b[} f$.

Si f est croissante et non majorée sur $]a, b[$ alors $\lim_{b^-} f = +\infty$.

• Si f est croissante et minorée sur $]a, b[$ alors $\lim_{a^+} f$ existe et vaut $\inf_{]a, b[} f$.

Si f est croissante et non minorée sur $]a, b[$ alors $\lim_{a^+} f = -\infty$.

Proposition 4 Prolongement par continuité

Soit f une fonction définie et continue sur $I \setminus \{a\}$ telle que $\lim_a f = \ell$.

$$\text{On pose } g : \begin{cases} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \quad \text{si } x \neq a \\ a & \mapsto & \ell \end{cases}$$

Alors g est continue sur I ; c'est l'unique prolongement par continuité de f en a .

Proposition 5 Méthode de dichotomie

Si f est continue sur $[a, b]$ telle que $f(a)f(b) \leq 0$ alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Proposition 6 Théorème des valeurs intermédiaires Admettre la proposition 5 pour la démontrer

Soit f continue sur un intervalle I .

Soient $(a, b) \in I^2$ alors toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteinte par f entre a et b .

Proposition 7 Image d'un intervalle Admettre la proposition 6 pour la démontrer

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Proposition 8 Théorème des bornes atteintes

Soit f continue sur $[a, b]$ alors f est bornée et atteint ses bornes ; autrement dit, f admet un maximum et un minimum sur $[a, b]$.

Exercice de DM 1 Suite définie de manière implicite

On définit pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une seule solution strictement positive, notée u_n .
2. Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in]0, \frac{2}{3}[$.
3. Montrer que, pour tout x élément de $]0, 1[$, on a : $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
4. En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis les variations de la suite (u_n) .
5. Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
6. (BONUS) Déterminer ℓ

Exercice de DM 2 Famille de matrices

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et montrer que A est inversible, donner son inverse.
2. Pour tout λ de \mathbb{C} , calculer $(A - \lambda I)(A^2 + \lambda A + \lambda^2 I)$.
3. Montrer que si λ est dans $\{1, j, j^2\}$ alors $A - \lambda I$ n'est pas inversible.
4. Montrer que si λ n'est pas dans $\{1, j, j^2\}$, alors $A - \lambda I$ est inversible.
Exprimer alors $(A - \lambda I)^{-1}$ en fonction de I, A, A^2 .

À savoir faire

Donner une question de cours, puis un premier exercice sur le chapitre probabilités. Le second exercice pourra ensuite être au choix entre probabilités et limites-continuité (pas d'exercice sur la dérivabilité cette semaine)

- Utiliser les définitions de convergence avec des ε ou des A .
- Déterminer des limites de fonctions, prolonger des fonctions par continuité lorsque cela est possible
- Introduire des notations claires pour définir les événements dont on calcule les probabilités
- Savoir distinguer les situations dans lesquelles il y a équiprobabilité.
- Savoir distinguer dans quels cas on doit utiliser la formule des probabilités totales (lorsqu'il y a une s.c.e qui donne une partition "naturelle" de l'univers)
- Savoir distinguer dans quels cas on doit utiliser la formule des probabilités composées (lorsqu'il y a une notion d'ordre chronologique, où le résultat de la première expérience a une modification le déroulement de la deuxième, puis de la troisième etc.)

Le programme officiel

A - Limites et continuité

Le paragraphe a) consiste largement en des adaptations au cas continu de notions déjà étudiées pour les suites. Afin d'éviter des répétitions, le professeur a la liberté d'admettre certains résultats.

Pour la pratique du calcul de limites, on se borne à ce stade à des calculs très simples, en attendant de disposer d'outils efficaces (développements limités).

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Limite d'une fonction en un point

Étant donné un point a de $\overline{\mathbb{R}}$ appartenant à I ou extrémité de I , limite finie ou infinie d'une fonction en a .
Unicité de la limite.

Si f est définie en a et possède une limite en a , alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Si f possède une limite finie en a , alors f est bornée au voisinage de a .

Limite à droite, limite à gauche.

Caractérisation séquentielle de la limite (finie ou infinie).

Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.

Passage à la limite d'une inégalité large.

Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$), par majoration (limite $-\infty$).

Théorème de la limite monotone.

Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.

Notations $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Notations $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

b) Continuité en un point

Continuité, prolongement par continuité en un point.

Continuité à gauche, à droite.

Caractérisation séquentielle de la continuité en un point.

Opérations sur les fonctions continues en un point : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.

La continuité de f au point a de I est définie par la relation $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$.

c) Continuité sur un intervalle

Continuité sur un intervalle.

Théorème des valeurs intermédiaires.

Image d'un intervalle par une fonction continue.

Corollaire : cas d'une fonction continue strictement monotone.

Théorème des bornes atteintes : toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Image d'un segment par une fonction continue.

Principe de démonstration par dichotomie.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Une fonction continue sur un intervalle, à valeurs réelles et injective, est strictement monotone.

Toute fonction réelle strictement monotone, définie et continue sur un intervalle, admet une fonction réciproque de même monotonie, définie et continue sur un intervalle.

La démonstration n'est pas exigible.

d) Fonctions complexes

Brève extension des définitions et résultats généraux sur les limites et la continuité.

Caractérisation de la limite et de la continuité à l'aide des parties réelle et imaginaire.
