

Colle 21 : polynômes

Résultats et preuves à connaître

Proposition 1 Polynômes associés

Soient $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$.

$$A|B \text{ et } B|A \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^*, A = \lambda B$$

Les polynômes A et B sont dits **associés**.

Proposition 2 Théorème de la division euclidienne

Soient $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $B \neq 0$.

Il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que :

$$A = BQ + R \text{ et } \deg(R) < \deg(B)$$

Q et R sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B .

Proposition 3 Principe de l'algorithme d'Euclide

Soient $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $B \neq 0$.

Si $A = BQ + R$ alors $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(B) \cap \mathcal{D}(R)$.

Définition 1 PGCD

Soient $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$ avec $A \neq 0$ ou $B \neq 0$.

Il existe un unique polynôme unitaire D dont les diviseurs sont les diviseurs communs à A et B , c'est-à-dire

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], P|A \text{ et } P|B \iff P|D$$

D est appelé pgcd de A et B et noté $A \wedge B$. C'est le polynôme unitaire associé au dernier reste non nul de l'algorithme d'Euclide.

On pose par convention : $0 \wedge 0 = 0$.

Définition 2 PPCM

Soient $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$.

Il existe un unique polynôme unitaire M dont les multiples sont les multiples communs à A et B , c'est-à-dire

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], A|P \text{ et } B|P \iff M|P$$

M est appelé **ppcm** de A et B et noté $A \vee B$.

On pose par convention que : $A \vee 0 = 0$.

Proposition 4 Décomposition en produit de facteurs irréductibles

Tout polynôme non constant peut s'écrire sous la forme

$$P = Q_1 Q_2 \dots Q_r$$

où les Q_i sont irréductibles et $r \in \mathbb{N}$.

De plus, cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près si on l'écrit

$$P = \lambda P_1^{m_1} P_2^{m_2} \dots P_k^{\alpha_k}$$

où les P_i sont irréductibles et unitaires, 2 à 2 distincts, $\lambda \in \mathbb{K}^*$ (coefficient dominant de P), $k \in \mathbb{N}$ et les α_i entiers naturels.

Proposition 5 Calcul du PPCM et du PGCD

Soient $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$, non constants. Posons $A = \lambda \prod_{i=1}^k P_i^{\alpha_i}$ et $B = \mu \prod_{i=1}^k P_i^{\beta_i}$.

i) $D|A$ si et seulement si il se décompose sous la forme $D = \nu \prod_{i=1}^k P_i^{\sigma_i}$ où pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $\sigma_i \leq \alpha_i$

ii) $A \wedge B = \prod_{i=1}^k P_i^{\min(\alpha_i, \beta_i)}$ et $A \vee B = \prod_{i=1}^k P_i^{\max(\alpha_i, \beta_i)}$

Proposition 6 Lien entre racine et divisibilité

$$P(\alpha) = 0 \iff (X - \alpha) | P$$

Proposition 7 Nombre de racines

Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont n racines distinctes de P alors $\prod_{i=1}^n (X - \alpha_i) | P$.

Le degré d'un polynôme non-nul est donc toujours supérieur ou égal à son nombre de racines.

Le seul polynôme qui s'annule en une infinité de valeurs est le polynôme nul.

Proposition 8 Caractérisation 1 de la multiplicité d'une racine une propriété

α est une racine de multiplicité k de P (rappeler la définition d'origine) ssi il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P = (X - \alpha)^k Q \quad \text{et} \quad Q(\alpha) \neq 0$$

(on part de la définition d'origine : la multiplicité est la plus grande valeur de k telle que $(X - \alpha)^k | P$)

Proposition 9 Multiplicité des racines et dérivation

Si α est racine d'ordre $k \geq 1$ de P alors α est racine d'ordre $k - 1$ de P' .

Si α est racine d'ordre $k \geq n$ de P alors α est racine d'ordre $k - n$ de $P^{(n)}$.

À savoir faire

- Tout sur l'arithmétique des entiers
- Poser une division euclidienne de polynômes
- Calculer un PGCD de deux polynômes (algorithme d'Euclide, si les polynômes se décomposent facilement en produit d'irréductibles, on utilise la proposition 3)
- Poser une division euclidienne de polynômes
- Pour une matrice A dont on observe un polynôme annulateur P , calculer les puissances de A en utilisant la division euclidienne de X^n par P

Ce qu'en dit le programme

Polynômes et fractions rationnelles

L'objectif de cette section est d'étudier les propriétés de base des polynômes et fractions rationnelles. Il s'agit d'objets particulièrement riches, dont l'étude interagit avec beaucoup de thèmes abordés pendant le semestre.

L'arithmétique de $\mathbb{K}[X]$ est développée selon le plan déjà utilisé pour l'arithmétique de \mathbb{Z} , ce qui autorise un exposé allégué. Le programme se limite au cas où le corps de base \mathbb{K} est égal à \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Anneau des polynômes à une indéterminée

Anneau $\mathbb{K}[X]$.
Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire.
Degré d'une somme, d'un produit.
Composition.

La construction de $\mathbb{K}[X]$ est hors programme.
Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n .
L'anneau $\mathbb{K}[X]$ est intègre.

b) Divisibilité et division euclidienne

Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, diviseurs, multiples. Caractérisation des couples de polynômes associés.
Théorème de la division euclidienne.

Algorithme de la division euclidienne.

c) Fonctions polynomiales et racines

Fonction polynomiale associée à un polynôme. Racine (ou zéro) d'un polynôme, caractérisation en termes de divisibilité.
Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré.
Multiplicité d'une racine.
Polynôme scindé. Relations entre coefficients et racines (formules de Viète).

Lien avec l'introduction aux équations algébriques de la section Nombres complexes.
Méthode de Horner pour l'évaluation polynomiale.
Détermination d'un polynôme par la fonction polynomiale associée.

Les formules concernant la somme et le produit doivent être connues des étudiants ; les autres doivent être retrouvées rapidement.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

d) Dérivation

Dérivée formelle d'un polynôme.

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, lien avec la dérivée de la fonction polynomiale associée.

Opérations sur les polynômes dérivés : combinaison linéaire, produit. Formule de Leibniz.

Formule de Taylor polynomiale.

Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les polynômes dérivés successifs.

e) Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

PGCD de deux polynômes dont l'un au moins est non nul.

Tout diviseur commun à A et B de degré maximal est appelé un PGCD de A et B .

Algorithme d'Euclide.

L'ensemble des diviseurs communs à A et B est égal à l'ensemble des diviseurs d'un de leurs PGCD. Tous les PGCD de A et B sont associés. Un seul est unitaire, on le note $A \wedge B$.

Relation de Bézout.

Détermination d'un couple de Bézout par l'algorithme d'Euclide étendu.

PPCM.

Notation $A \vee B$.

Couple de polynômes premiers entre eux. Théorème de Bézout. Lemme de Gauss.

Adaptation des résultats présentés lors de l'étude de l'arithmétique dans \mathbb{Z} .

PGCD d'un nombre fini de polynômes, relation de Bézout. Polynômes premiers entre eux dans leur ensemble, premiers entre eux deux à deux.