Colle 19 : Arithmétique et Dérivation

Résultats et preuves à connaître

Proposition 1 Caractérisation de la monotonie pour les fonctions dérivables

Soit f dérivable sur $]a,b[$.
f est croissante sur $]a,b[\iff f' \geqslant 0$ sur $]a,b[$.
f est décroissante sur $]a,b[\iff f' \leqslant 0$ sur $]a,b[$.
f est constante sur $]a,b[\iff f' = 0$ sur $]a,b[$.

Proposition 2 Stricte monotonie

Soit f dérivable sur $]a,b[$.
f est strictement monotone sur $]a,b[\iff f'$ est de signe constant sur $]a,b[$ et ne s'annule pas sur un intervalle ouvert inclus dans $]a,b[$.

Proposition 3 Interprétation géométrique de la convexité

Une fonction est convexe si pour tout couple de réels $(x,y) \in I^2$, l'arc de la courbe compris entre les points A (de coordonées $(x, f(x))$) et B (de coordonnées $(y, f(y))$) se situe sous la sécante reliant A et B.

Proposition 4 Inégalité de Jensen

Savoir rappeler la défintion de fonction convexe, ainsi que son interprétation graphique.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, et tout n-uplet $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n \text{ vérifiant } \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1 \text{ on a } f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Proposition 5 Inégalité des 3 pentes

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors pour tout $(a,b,c) \in I^3$ vérifiant $a < b < c$, on a

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$

Proposition 6 Position par rapport aux tangentes

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et dérivable.
Pour tout $a \in I$, le graphe de f est au dessus de sa tangente en a, c'est-à-dire :

$$\forall a \in I, \forall x \in I, \quad f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a).$$

Proposition 7 Croissance des pentes

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Pour tout $a \in I$ on note

$$\tau_a : \begin{cases} I\setminus\{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{cases}$$

La fonction f est convexe sur I si et seulement si, pour tout $a \in I$, τ_a est croissante.

Proposition 8 Caractérisation des fonctions convexes dérivables et deux fois dérivables

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. La fonction f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I.
Et dans le cas où f est deux fois dérivable, f est convexe ssi $f'' \geq 0$

Proposition 9 Algorithme d'Euclide

- Si r est le reste de la division euclidienne de a par b alors

$$\mathscr{D}(a) \cap \mathscr{D}(b) = \mathscr{D}(b) \cap \mathscr{D}(r)$$

- le pgcd de a et b est le dernier reste non nul de l'algorithme d'Euclide et $\mathscr{D}(a) \cap \mathscr{D}(b) = \mathscr{D}(a \wedge b)$

Proposition 10 Coefficients de Bezout

Soient $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. Il existe $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$au + bv = a \wedge b$$

u et v sont appelés **coefficients de Bezout** de a et b.

Proposition 11 Conséquence

Soient $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$

$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = (a \wedge b)\mathbb{Z}$$

Proposition 12 Théorème de Gauss

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$.

$$a \wedge b = 1 \quad \text{et} \quad a \mid bc \Longrightarrow a \mid c$$

Exercice de DM 1 Prolongement $\mathcal{C}^1$

Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Justifier que f est de classe C^1 sur $[0,1[$. puis dresser le tableau de variations de f. On y fera apparaître les différentes limites et la valeur de $f(e)$.

Exercice de DM 2 Suite récurrente

Soit v la suite définie par $v_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \frac{v_n}{\ln(v_n)}$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \geqslant e$.

En utilisant que $\forall x \geqslant e, 0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{4}$ (sans le prouver) montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |v_n - e| \leqslant \dfrac{1}{4^n}$.

À savoir faire

- ☐ Savoir utiliser l'inégalité des accroissements finis (par exemple, pour trouver la vitesse de convergence d'une suite définie par une relation de récurrence)
- ☐ Savoir utiliser l'égalité des accroissements finis, le théorème de Rolle
- ☐ Savoir dériver n fois une fonction (formule de Leibniz, ou calculer la dérivée, dérivée seconde etc. conjecturer une formule puis la prouver par récurrence)
- ☐ Montrer qu'un prolongement est de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle (donner l'énoncé du théorème utilisé).
- ☐ Tous les exercices sur la continuité (théorème des valeurs intermédiaires, des bornes atteintes etc.)
- ☐ Faire des calculs modulo n.
- ☐ Penser à calculer une quantité modulo n pour montrer qu'elle est multiple de n.

Ce qu'en dit le programme

C - Convexité

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
La fonction f est convexe sur I si, pour tous $(x,y) \in I^2$ et $\lambda \in [0,1]$, $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$.	Interprétation géométrique.
Inégalité de Jensen : si f est une fonction convexe sur un intervalle I, on a l'inégalité $$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$ quels que soient les réels positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de somme 1 et quels que soient les éléments $x_1, \dots, x_n$ de I.	Tout développement général sur les barycentres est hors programme.
Caractérisation de la convexité par la croissance des pentes.	
Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
b) Fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables	
Caractérisation des fonctions convexes dérivables. Position du graphe d'une fonction convexe dérivable par rapport à ses tangentes. Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables.	

Arithmétique dans l'ensemble des entiers relatifs

L'objectif de cette section est d'étudier les propriétés de la divisibilité des entiers et des congruences. L'approche préconisée reste élémentaire en ce qu'elle ne fait pas appel au langage des structures algébriques.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Divisibilité et division euclidienne	
Divisibilité dans $\mathbb{Z}$, diviseurs, multiples. Théorème de la division euclidienne.	Caractérisation des couples d'entiers associés.
b) PGCD et algorithme d'Euclide	
PGCD de deux entiers naturels dont l'un au moins est non nul.	Notation $a \wedge b$. Le PGCD de a et b est défini comme étant le plus grand élément (pour l'ordre naturel dans $\mathbb{N}$) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b.
Algorithme d'Euclide.	L'ensemble des diviseurs communs à a et b est égal à l'ensemble des diviseurs de $a \wedge b$. $a \wedge b$ est le plus grand élément (au sens de la divisibilité) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, PGCD de ka et kb.
Extension au cas de deux entiers relatifs.	
Relation de Bézout.	Détermination d'un couple de Bézout par l'algorithme d'Euclide étendu.
PPCM.	Notation $a \vee b$.
c) Entiers premiers entre eux	
Couple d'entiers premiers entre eux.	
Théorème de Bézout.	Forme irréductible d'un rationnel.
Lemme de Gauss. Si a et b sont premiers entre eux et divisent n, alors ab divise n. Si a et b sont premiers à n, alors ab est premier à n. PGCD d'un nombre fini d'entiers, relation de Bézout. Entiers premiers entre eux dans leur ensemble, premiers entre eux deux à deux.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
d) Nombres premiers La semaine prochaine	
e) Congruences	
Relation de congruence modulo un entier sur $\mathbb{Z}$. Opérations sur les congruences : somme, produit. Utilisation d'un inverse modulo n pour résoudre une congruence modulo n. ~~Petit théorème de Fermat.~~	Notation $a \equiv b\ [n]$. Les anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont hors programme.