

# Colle 18 : Dérivation

## Résultats et preuves à connaître

### Définition 1 Théorème de la bijection

Pour la démonstration, on aura le droit d'admettre que si  $f$  est monotone sur  $I$  et  $f(I)$  est un intervalle alors  $f$  est continue sur  $I$ .

Soit  $f$  une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$  alors en posant  $J = f(I)$

- $J$  est un intervalle,
- $f$  est une bijection de  $I$  dans  $J$ ,
- $f^{-1}$  est strictement monotone, de même monotonie que  $f$
- $f^{-1}$  est continue sur  $J$ ,
- les courbes représentatives de  $f$  et  $f^{-1}$  sont symétriques par rapport à la droite d'équation  $y = x$  (première bissectrice).

### Proposition 1 Théorème

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est continue si et seulement si  $\operatorname{Re}(f)$  et  $\operatorname{Im}(f)$  sont continues.

### Proposition 2 Dérivation d'un inverse/d'un quotient

Si  $f$  et  $g$  sont dérivables sur  $I$  et  $g$  est non nulle sur  $I$  alors  $\frac{1}{g}$  et  $\frac{f}{g}$  sont dérivables sur  $I$  et

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$$

### Proposition 3 Dérivation d'une composée

Si  $f$  dérivable sur  $I$ ,  $g$  dérivable sur  $J$  et  $f(I) \subset J$  alors  $g \circ f$  est dérivable sur  $I$  et

$$(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$$

### Proposition 4 Dérivée d'une fonction réciproque

Si  $f$  est bijective sur  $I$  et dérivable en  $a \in I$  tel que  $f'(a) \neq 0$  alors  $f^{-1}$  est dérivable en  $b = f(a)$  et

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

**Proposition 5** Formule de Leibniz

Si  $f$  et  $g$  sont  $n$ -fois dérivables sur  $I$  alors  $f + g$  et  $f \times g$  sont  $n$ -fois dérivables sur  $I$  et

$$(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)} \quad \text{et} \quad (f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)}$$

**Définition 2** Théorème

Soit  $f$  dérivable sur  $] \alpha, \beta[$  et  $a \in ] \alpha, \beta[$ .

Si  $f$  admet un extremum local en  $a$  alors  $f'(a) = 0$  :  $a$  est appelé **point critique** de  $f$ .

**Proposition 6** Théorème de Rolle

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$  et  $f(a) = f(b)$  alors  $\exists c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

**Proposition 7** Égalité des accroissements finis (EAF)

À démontrer en admettant la proposition 6 Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$  alors  $\exists c \in ]a, b[$  tel que  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ .

**Proposition 8** Théorème de la limite de la dérivée

Soit  $a \in I$ . Si  $f$  est continue sur  $I$ , dérivable sur  $I \setminus \{a\}$  et  $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$ .

Si  $\ell \in \mathbb{R}$  alors  $f$  est dérivable en  $a$  et  $f'(a) = \ell$ .

Si  $\ell$  est infini alors  $f$  n'est pas dérivable en  $a$  et  $C_f$  admet une tangente verticale en  $a$ .

## À savoir faire

- Utiliser les définitions de convergence avec des  $\varepsilon$  ou des  $A$ .
- Déterminer des limites de fonctions, prolonger des fonctions par continuité lorsque cela est possible
- Utiliser le théorème des bornes atteintes
- Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires (permet de justifier l'existence d'une solution à un problème, de définir une suite de réels  $x_n$  solutions d'équations dépendantes de  $n$ )
- Savoir dériver  $n$  fois une fonction (formule de Leibniz, ou calculer la dérivée, dérivée seconde etc. conjecturer une formule puis la prouver par récurrence)

## Ce qu'en dit le programme

### B - Dérivabilité

#### CONTENUS

#### CAPACITÉS & COMMENTAIRES

#### b) Extremum local et point critique

Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur.

Un point critique est un zéro de la dérivée.

#### c) Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Théorème de Rolle.

Égalité des accroissements finis.

Inégalité des accroissements finis : si  $f$  est dérivable et si  $|f'|$  est majorée par  $K$ , alors  $f$  est  $K$ -lipschitzienne.

Interprétations géométrique et cinématique.

La notion de fonction lipschitzienne est introduite à cette occasion.

Application à l'étude de suites définies par une relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle.

Théorème de la limite de la dérivée : si  $f$  est continue sur  $I$ , dérivable sur  $I \setminus \{a\}$  et si  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$ , alors

$f$  est dérivable en  $a$  et  $f'(a) = \ell$ .

Extension au cas où  $\ell = \pm\infty$ .

La fonction  $f'$  est alors continue en  $a$ .

#### d) Fonctions de classe $C^k$

Pour  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , fonction de classe  $C^k$ .

Opérations sur les fonctions de classe  $C^k$  : combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, réciproque.

Les démonstrations relatives à la composition et à la réciproque ne sont pas exigibles.