

DM n°6

On note \mathcal{P} l'ensemble des nombres premiers et $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers compris dans $[0, n]$. Dans tout le problème la lettre p désignera toujours un nombre premier.

I. Une minoration de $\pi(n)$.

On considère, pour tout entier $n \geq 1$, l'entier $\Delta_n = \text{ppcm}(1, 2, \dots, n)$. Etant donnés $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $1 \leq b \leq a$, on pose

$$I(b, a) = \int_0^1 x^{b-1} (1-x)^{a-b} dx$$

1. Calcul de $I(b, a)$: première méthode.

(a) Expliciter $I(1, a)$ en fonction de a .

(b) Montrer que si $b < a$ alors $I(b+1, a) = \frac{b}{a-b} I(b, a)$.

(c) En déduire que $I(b, a) = \frac{1}{b \binom{a}{b}}$.

2. Calcul de $I(b, a)$: deuxième méthode.

(a) A l'aide de la formule du binôme, montrer que $\int_0^1 (1-x+xy)^{a-1} dx = \sum_{k=1}^a \binom{a-1}{k-1} y^{k-1} I(k, a)$.

(b) En calculant directement l'intégrale, montrer que $\int_0^1 (1-x+xy)^{a-1} dx = \frac{1}{a} \sum_{k=1}^a y^{k-1}$.

(c) En déduire que $I(b, a) = \frac{1}{b \binom{a}{b}} = \frac{1}{a \binom{a-1}{b-1}}$.

3. (a) Montrer que $I(b, a) = \sum_{k=0}^{a-b} (-1)^k \binom{a-b}{k} \frac{1}{k+b}$.

(b) En déduire que $I(b, a) \Delta_a \in \mathbb{N}$.

(c) Prouver que l'entier $b \binom{a}{b}$ divise l'entier Δ_a .

4. Soit $n \geq 1$ un entier.

(a) Montrer que les entiers $n \binom{2n}{n}$ et $(2n+1) \binom{2n}{n}$ divisent l'entier Δ_{2n+1} . On pourra remarquer que pour tout $k \geq 1$, Δ_k divise Δ_{k+1} .

(b) En déduire que l'entier $n(2n+1) \binom{2n}{n}$ divise Δ_{2n+1} en remarquant les entiers n et $2n+1$ sont toujours premiers entre eux.

(c) Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, on a l'inégalité $\binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}$.

(d) En déduire que $(2n+1) \binom{2n}{n} \geq 4^n$ en développant l'égalité $4^n = (1+1)^{2n}$.

- (e) En déduire que $\Delta_{2n+1} \geq n4^n$.
 (f) Montrer que si $n \geq 9$ alors $\Delta_n \geq 2^n$ et vérifier que cette inégalité est encore vraie pour $n = 7$ et $n = 8$.

5. Soit $n \geq 1$ un entier.

- (a) Soit $p \in \mathcal{P}$, montrer que $p^{v_p(\Delta_n)} \leq n$.
 (Indication : on commencera par exprimer $v_p(\Delta_n)$ en fonction des entiers $v_p(1), \dots, v_p(n)$).
 (b) Montrer que $\Delta_n = \prod_{p \leq n} p^{v_p(\Delta_n)}$.
 (c) En déduire que $\Delta_n \leq n^{\pi(n)}$.

6. Montrer que pour tout $n \geq 7$ on a

$$\pi(n) \geq \ln(2) \frac{n}{\ln(n)}$$

II. Une majoration de $\pi(n)$.

1. On cherche dans cette question à majorer simplement le produit $\prod_{p \leq n} p$ en fonction de l'entier $n \geq 1$.

- (a) Soient a et b deux entiers tels que $0 < \frac{b}{2} \leq a < b$. Montrer que le produit $\prod_{a < p \leq b} p$ divise l'entier $\binom{b}{a}$.
 (b) En déduire que pour tout $m \geq 1$, le produit $\prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p$ divise l'entier $\binom{2m+1}{m+1}$.
 (c) Comparer, pour $m \geq 1$, les entiers $\binom{2m+1}{m}$ et $\binom{2m+1}{m+1}$.
 (d) En déduire que pour tout entier $m \geq 1$, $\binom{2m+1}{m} \leq 4^m$ en développant $(1+1)^{2m+1}$.
 (e) Montrer que pour tout entier $m \geq 1$, on a $\prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p \leq 4^m$.
 (f) Prouver finalement que pour tout entier $m \geq 1$, on a $\prod_{p \leq n} p \leq 4^n$.
 On pourra montrer par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n) : \forall k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket, \prod_{p \leq k} p \leq 4^k$.

2. On admet que pour tout entier $m \geq 1$, on a $m! > \left(\frac{m}{e}\right)^m$.

En déduire que pour tout $n \geq 2$, on a $\pi(n)! \leq 4^n$ et que par suite, on a $\pi(n) \ln \pi(n) - \pi(n) \leq n \ln(4)$.

3. On souhaite montrer, à partir du résultat précédent, que pour tout $n \geq 3$ on a

$$\pi(n) \leq e \frac{n}{\ln(n)}$$

Pour cela on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un entier $n_0 \geq 3$ tel que $\pi(n_0) > e \frac{n_0}{\ln(n_0)}$.

- (a) Montrer que la fonction $x \mapsto x \ln(x) - x$ est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
 En déduire que $\frac{e - \ln(4)}{e} < \frac{\ln(\ln(n_0))}{\ln(n_0)}$.
 (b) Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ est majorée par e^{-1} sur $[1, +\infty[$. Conclure.