

# DM n°5.

## A - Étude de fonction

Soit  $f$  la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition  $D$  de  $f$ .
2.  $f$  est-elle dérivable en 0 ? Justifier que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $[0, 1[$ .
3. Dresser le tableau de variations de  $f$ . On y fera apparaître les différentes limites et la valeur de  $f(e)$ .

## B - Étude d'une suite récurrente

Soit  $v$  la suite définie par

$$v_0 = 3 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{v_n}{\ln(v_n)}$$

1. (a) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq e$ .  
(b) Justifier que la suite  $v$  converge et déterminer sa limite.
2. (a) Montrer que  $\forall x \geq e, 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$ .  
(b) Énoncer l'inégalité des accroissements finis.  
(c) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, |v_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$ .
3. (a) Sachant que  $4^5 > 1000$ , déterminer un entier  $n_1$  à partir duquel  $v_n$  est une valeur approchée de  $e$  à  $10^{-12}$  près.  
(b) Écrire un programme **suite** en Python qui donne en sortie une valeur approchée de  $e$  à la précision demandée en entrée.