Correction du DM n°5.

A - Étude de fonction

1. f est définie ssi $x \geqslant 0$ et $\ln(x) \neq 0$ soit $\boxed{D = [0,1[\cup]1,+\infty[}$

2. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\ln(x)} = 0$ donc f est dérivable en 0 et $\boxed{f'(0)=0}$
   D'après les théorèmes généraux, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$.
   <u>Étude en 0</u> : $\forall x \in]0,1[$, $f'(x) = \dfrac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)} = \dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{1}{\ln^2(x)}$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 0 = f'(0)$ et f' est continue en 0; soit $\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ en 0 et donc sur } [0,1[}$.

3. $f'(x) \geqslant 0 \iff \ln(x) \geqslant 1 \iff x \geqslant e$.

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$ $-\infty$	||	$+\infty$ $\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

   $f(e) = \dfrac{e}{\ln(e)} = e$.
   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\ln(x)} = +\infty$ par croissances comparées
   $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ par composition de limites.

B - Étude d'une suite récurrente

1. (a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant e$.
   $v_0 = 3 \geqslant e$ donc l'inégalité est vraie au rang 0.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $v_n \geqslant e$.
   D'après l'hypothèse de récurrence, $v_n \geqslant e$. Or $f \geqslant e$ sur $[e,+\infty[$, donc $v_{n+1} = f(v_n) \geqslant e$. L'inégalité est vraie au rang $n+1$.
   Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geqslant e}$

   (b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$ et donc $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{1}{\ln(v_n)} \leqslant 1$ car $v_n \geqslant e$. Donc $\boxed{(v_n) \text{ est décroissante}}$.
   De plus, (v_n) est minorée par e donc (v_n) converge vers $\ell \geqslant e$.
   Comme f est continue sur $]1,+\infty[$, d'après le théorème du point fixe,
   $f(\ell) = \ell \iff \ell = \dfrac{\ell}{\ln(\ell)} \iff \ell(\ln(\ell)-1) = 0 \iff \ell = 0$, qui est exclu car $\ell \geqslant e$, ou $\ell = e$.
   Finalement, $\boxed{(v_n) \text{ converge vers } e}$

2. (a) f' est dérivable sur $[e,+\infty[$ et $f''(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\ln^2(x) - (\ln(x)-1)\frac{2}{x}\ln(x)}{\ln^4(x)} = \dfrac{2-\ln(x)}{x\ln^3(x)}$

x	e		e^2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

donc $\boxed{\forall x \geqslant e, 0 \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{4}}$

(b) Soit f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ telle que $\exists M \geqslant 0, \forall x \in]a,b[, |f'(x)| \leqslant M$, alors $|f(b)-f(a)| \leqslant M\,|b-a|$.

(c) On applique l'inégalité des accroissements finis à f entre e et v_n. Comme $v_n \geqslant e$, on a alors $\left|f'(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{4}$ entre e et v_n. D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_{n+1}-e| \leqslant \dfrac{1}{4}\,|v_n - e|$.

On obtient par une récurrence immédiate que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |v_n - e| \leqslant \dfrac{1}{4^n}}$

3. (a) Si $\dfrac{1}{4^n} \leqslant 10^{-12}$ alors $|v_n - e| \leqslant 10^{-12}$. Or $\dfrac{1}{4^n} \leqslant 10^{-12} \Longleftrightarrow 4^n \geqslant 10^{12}$. De plus, $4^5 > 10^3$ d'où $4^{20} > 10^{12}$. On peut prendre $\boxed{n_1 = 20}$

(b) Programme **suite** en Python :

```python
def suite(precision) :
    from math import log
    v = 3
    n = 0
    while 1/(4**n) > precision :
        v = v / log(v)
        n = n + 1
    return v
```