

Correction du DS n°6.

Durée : 4 heures

Exercice 1 : une équation fonctionnelle

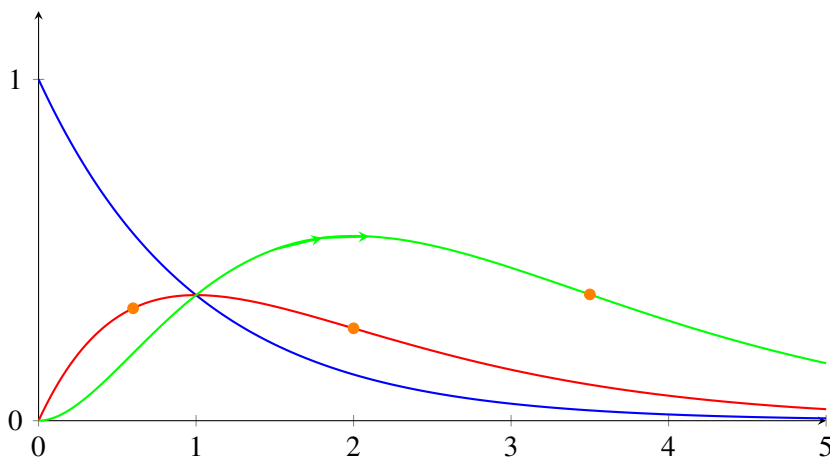
1. Si f est constante égale à k , on doit donc avoir $k = k^2$, soit $k \in \{0, 1\}$. Réciproquement la fonction nulle et la fonction égale à 1 sont solutions.
2. On fixe un valeur de y pour laquelle $f(y) \neq 0$ (une telle valeur existe puisqu'on a supposé que f n'était pas la fonction nulle) et on obtient à l'aide de la condition (C) appliquée à x et $-x$ les deux équations $f(\sqrt{x^2+y^2}) = f(x)f(y)$ et $f(\sqrt{x^2+y^2}) = f(-x)f(y)$. Avec l'hypothèse $f(y) \neq 0$, on en déduit $f(-x) = f(x)$, ce qui prouve la parité de la fonction f .
3. En appliquant la condition (C) pour $x = y = 0$, on a $f(0) = f(0)^2$, donc $f(0) = 1$ ou $f(0) = 0$. Si on suppose que $f(0) = 0$, appliquer la condition (C) a un réel x quelconque et à $y = 0$ donne $f(\sqrt{x^2}) = 0$, donc $f(|x|) = 0$. Mais f étant paire, on en déduit $f(x) = 0$ quel que soit le signe de x , et f est donc la fonction nulle. Comme on a fait l'hypothèse que f n'est pas nulle, la seule possibilité restante est $f(0) = 1$.
4. Procédons par récurrence. Pour $n = 0$, on a bien $f(u_0) = f(a) = 0$ par hypothèse. Supposons désormais $f(u_n) = 0$ et appliquons la condition (C) avec $x = y = u_{n+1}$. On calcule alors $\sqrt{2u_{n+1}^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{2^{n+1}}} = \sqrt{\frac{a^2}{2^n}} = u_n$, et on en déduit que $0 = f(u_{n+1})^2$, ce qui implique bien entendu $f(u_{n+1}) = 0$ et prouve l'hérédité de notre récurrence.
 Sous l'hypothèse $f(a) = 0$, on a donc construit une suite (u_n) vérifiant bien entendu $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = 0$ puisque cette suite est identiquement nulle. Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et, par continuité de f en 0, on devrait donc avoir $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(0) = 1$, ce qui est une contradiction flagrante. La fonction f ne peut donc pas s'annuler sur $]0, +\infty[$, ni d'ailleurs sur $]-\infty, 0[$ puisqu'elle est paire. Elle ne s'annule donc jamais.
5. Si $a > 0$, on applique la condition (C) à $x = y = \frac{a}{\sqrt{2}}$ pour obtenir $f(a) = f\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 \geq 0$ (c'est exactement le même calcul qu'à la question précédente, pour $n = 0$). Comme f ne peut pas s'annuler, on a donc $f(x) > 0$ sur $]0, +\infty[$. On conclut à nouveau en invoquant la parité de f .
6. (a) On vient de prouver que f était à valeur strictement positives, donc $f(\sqrt{x}) > 0$ sur $[0, +\infty[$, ce qui prouve que g est bien définie sur cet intervalle. La continuité est triviale (composition de fonctions continues).
 (b) Calculons $g(x)g(y) = \ln(f(\sqrt{x})) + \ln(f(\sqrt{y})) = \ln(f(\sqrt{x})f(\sqrt{y})) = \ln\left(f\left(\sqrt{\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}}\right)\right) = \ln(f(\sqrt{x+y})) = g(x+y)$, en utilisant la condition (C) en cours de calcul.
 (c) C'est une récurrence triviale exploitant la question précédente. Pour $n = 0$, $g(0) = \ln(f(0)) = \ln(1) = 0$, donc la propriété est vérifiée. Et si on la suppose vraie au rang n , alors $g((n+1)x) = g(nx+x) = g(nx) + g(x) = ng(x) + g(x) = (n+1)g(x)$.
 (d) Supposons $x = \frac{p}{q}$, avec p et q deux entiers strictement positifs. Alors $g(qx) = g(p) = pg(1)$, et par ailleurs $g(qx) = qg(x)$, donc $qg(x) = pg(1)$, puis $g(x) = \frac{p}{q}g(1) = xg(1)$.
 (e) Notons $a = g(1)$, on sait déjà que $g(x) = ax$ pour tout nombre x rationnel positif. Si x est un réel positif non rationnel, il est limite d'une suite (x_n) de nombres rationnels, donc $g(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} ax_n = ax$, ce qui prouve que $g(x) = ax$ sur $[0, +\infty[$ tout entier.
 (f) Puisque $g(x) = ax = \ln(f(\sqrt{x}))$, on a $f(\sqrt{x}) = e^{ax}$ pour tout réel positif, soit en faisant un minuscule changement de variable $f(x) = e^{ax^2}$. Par parité de f , cette expression reste valable sur \mathbb{R}^- . Réciproquement, toutes ces fonctions sont bien solutions (toutes les fonctions linéaires sont clairement solutions de l'équation vérifiée par g), et on retrouve en particulier la fonction constante égale à 1 lorsque $a = 0$. Il faut par contre ajouter à cet ensemble la fonction nulle qui n'en fait pas partie.

Exercice 2 : une famille de fonctions

1. Toutes les fonctions f_n sont de classe C^∞ sur \mathbb{R}^+ , de dérivée $f'_n(x) = -e^{-x}x^n + ne^{-x}x^{n-1} = e^{-x}x^{n-1}(n-x)$. Sur $[0, +\infty[$, le signe de cette dérivée est simplement celui de $n-x$, donc f_n est croissante sur $[0, n]$ et décroissante sur $[n, +\infty[$, avec pour maximum $f_n(n) = e^{-n}n^n = \left(\frac{n}{e}\right)^n$. De plus, $f_n(0) = 0$ (sauf pour $n = 0$ où on a f_n qui atteint son maximum de hauteur 1 en 0) et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ par croissance comparée. On dérive une deuxième fois : $f''_n(x) = e^{-x}x^n - 2ne^{-x}x^{n-1} + n(n-1)e^{-x}x^{n-2} = e^{-x}x^{n-2}(x^2 - 2nx + n^2 - n)$. La dérivée seconde est donc du signe du trinôme $x^2 - 2nx + n^2 - n$, qui a pour discriminant $\Delta = 4n^2 - 4(n^2 - n) = 4n$

et pour racines $x_1 = \frac{2n-2\sqrt{n}}{2} = n - \sqrt{n}$ et $x_2 = n + \sqrt{n}$. En oubliant le cas $n = 0$ (où la dérivée seconde est positive et la fonction convexe), on a donc deux valeurs d'annulation de f'' qui sont toutes les deux strictement positives, l'une inférieure à n et l'autre supérieure à n (dans le cas où $n = 1$ on aura $x_1 = 0$). On n'essaiera pas de calculer les valeurs de f_n aux points correspondants car ça ne se simplifie pas vraiment.

2. Rappelons simplement que la courbe de f_0 est convexe, celle de f_1 concave sur $[0, 2]$ puis convexe sur $[2, +\infty[$ (avec pour maximum $f_1(1) = \frac{1}{e}$), et celle de f_2 concave uniquement sur $[2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}]$, avec pour maximum $f_2(2) = \frac{4}{e^2}$. Signalons enfin que $f_1(2) = \frac{2}{e^2}$. On a indiqué par de gros points oranges les points de changement de convexité :



3. Par définition, $L_0(x) = e^x f_0(x) = e^x e^{-x} = 1$, puis $L_1(x) = e^x f'_1(x) = e^x e^x(1-x) = 1-x$ et

$$L_2(x) = \frac{e^x}{2} f''_2(x) = \frac{e^x}{2} e^{-x} (x^2 - 4x + 2) = \frac{1}{2} x^2 - 2x + 1.$$

4. Pour $n = 0$, la somme contient un seul terme égal à 1. Pour $n = 1$, elle vaut $1 + \binom{1}{1} \times (-x) = 1 - x$. Enfin, pour $n = 2$, on calcule $1 - \binom{2}{1}x + \binom{2}{2} \frac{x^2}{2!} = 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2$. Ces formules correspondent bien aux calculs de la question précédente.

5. En posant $g(x) = e^{-x}$ et $h(x) = x^n$, on a $f_n(x) = g(x)h(x)$. On peut alors appliquer la formule de Leibniz pour calculer $f_n^{(n)}$: $g^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x}$ (on change le signe à chaque dérivation) et $h^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$ (calcul classique, on fait une récurrence si on veut vraiment être hyper rigoureux). On en déduit que $f_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!(-1)^k e^{-x} x^k}{k!}$, puis $L_n(x) = \frac{e^x}{n!} f_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k x^k}{k!}$.

6. On constate simplement que $f_{n+1}(x) = x f_n(x)$, et on applique la formule de Leibniz, en ne gardant que les deux premiers termes puisque les dérivées ultérieures de l'identité vont s'annuler : $f_{n+1}^{(n+1)}(x) = x f_n^{(n+1)}(x) + (n+1) f_n^{(n)}(x)$.

7. Par définition, $f_{n+1}^{(n+1)}(x) = (n+1)! e^{-x} L_{n+1}(x)$. De même, $f_n^{(n)}(x) = n! e^{-x} L_n(x)$, donc $f_n^{(n+1)}(x) = -n! e^{-x} L_n(x) + n! e^{-x} L'_n(x)$. En reportant ces formules dans l'équation obtenue à la question précédente et en simplifiant par $n!$ et par e^{-x} , il reste $(n+1)L_{n+1}(x) = -x L_n(x) + x L'_n(x) + (n+1)L_n(x) = x L'_n(x) + (n+1-x)L_n(x)$.

8. Via la formule de Pascal, on peut écrire $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$, donc $\frac{1}{(k-1)!} \binom{n}{k} + \frac{1}{(k-1)!} \binom{n}{k-1} = \frac{1}{(k-1)!} \binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{(k-1)! k! (n+1-k)!}$. Par ailleurs, toujours en exploitant la formule de Pascal (mais dans un sens un peu inhabituel, $\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k} = \binom{n}{k-1}$), donc

$\frac{n+1}{k!} \binom{n+1}{k} - \frac{n+1}{k} \binom{n}{k} = \frac{n+1}{k!} \binom{n}{k-1} = \frac{(n+1)n!}{k!(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(k-1)!(n+1-k)!}$ En réorganisant les termes, on vient de démontrer l'égalité demandée.

9. On procède par récurrence. Le résultat pour $n = 0$ a déjà été vérifié à la question 4, supposons donc la formule correcte au rang n , alors on peut écrire $L'_n(x) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} \times kx^{k-1} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{(k-1)!} x^{k-1}$. On calcule alors, en exploitant bien entendu le résultat de la question 7,

$$(n+1)L_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{(k-1)!} x^k + (n+1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} x^k - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} x^{k+1}$$

avec un petit décalage d'indices sur la dernière somme (le $(-1)^k$ n'a pas été modifié mais le signe devant la somme changé pour compenser). On peut regrouper tous les termes d'indice compris entre 1 et n (et sortir les autres des sommes) et utiliser la question précédente pour obtenir $L_{n+1}(x) = (n+1) \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} \frac{(-1)^k}{k!} x^k + (n+1) + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} x^{n+1}$ (les deux termes sortis sont ceux d'indice 0 de la somme du milieu, qui vaut donc $n+1$ et celui d'indice $n+1$ de la somme de droite). Il ne reste qu'à diviser par $n+1$ et constater que, miraculeusement, les deux termes sortis se réinsèrent en tant que terme d'indice 0 et terme d'indice $n+1$ dans la somme pour donner exactement la formule prouvant l'hérédité.

10. On peut utiliser les relations obtenues en cours d'exercice, mais on peut aussi bourriner salement puisqu'on a une formule explicite. On a déjà calculé $L'_n(x)$ sous forme de somme plus haut, constatons donc que $L'_n(x) - L'_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{(k-1)!} x^{k-1} - \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{(-1)^k}{(k-1)!} x^{k-1} = -\sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} \frac{(-1)^k}{(k-1)!} x^{k-1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n!} x^n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} x^k + \frac{(-1)^n}{n!} x^n = L_n(x)$ (encore une fois, le changement de signe lors du décalage d'indice est compensé par le fait qu'on ne modifie pas le $(-1)^k$ dans la somme).

Exercice 3 : Suites récurrentes et matrices

1. $N = A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ d'où $N^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = O_2$ donc N est nilpotente

2. $A = N + 2I_2$ et N et $2I_2$ commutent, on peut donc appliquer la formule du binôme de Newton.

$$\forall n \geq 2, A^n = (N + 2I_2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k (2I_2)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} N^k = \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} 2^{n-k} N^k \quad \text{car } \forall k \geq 2, N^k = O_2$$

Donc $A^n = 2^n I_2 + n2^{n-1} N = 2^n I_2 + n2^{n-1} (A - 2I_2)$ soit $\forall n \geq 2, A^n = (1-n)2^n I_2 + n2^{n-1} A$

On constate que la formule est vérifiée si $n = 0$ ou $n = 1$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 3v_n \end{cases} \iff \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \iff U_{n+1} = AU_n$

(U_n) est donc une suite géométrique de raison A et de premier terme U_0 donc $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = A^n U_0$

D'où $U_n = ((1-n)2^n I_2 + n2^{n-1} A)U_0 = (1-n)2^n U_0 + n2^{n-1} AU_0$ soit $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = (1-n)2^n U_0 + n2^{n-1} U_1$

4. $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = (1-n)2^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + n2^{n-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$

soit $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (1-n)2^n u_0 + n2^{n-1} u_1$ et $v_n = (1-n)2^n v_0 + n2^{n-1} v_1$

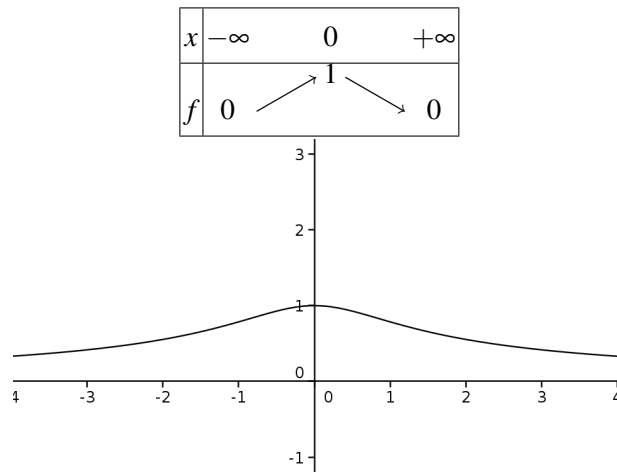
Or $u_0 = v_0 = 1$ d'où $u_1 = u_0 - v_0 = 0$ et $v_1 = u_0 + 3v_0 = 4$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (1-n)2^n$ et $v_n = (n+1)2^n$

Problème : Analyse**A. Étude d'une première fonction.**

- Comme $\text{Arctan}(0) = 0$, la fonction f est exactement le taux d'accroissement de la fonction arctangente en 0. Sa limite est donc égale à $\text{Arctan}'(0) = \frac{1}{1+0^2} = 1$. On va donc effectuer le prolongement par continuité en posant $f(0) = 1$.
- La fonction f est paire comme quotient de fonctions impaires. Si elle est dérivable en 0, on a donc
- Calculons : $\forall x \neq 0, f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x^2} - \text{Arctan}(x)}{x^2} = \frac{x - (1+x^2)\text{Arctan}(x)}{x^2(1+x^2)}$.
- Effectuons donc une IPP en posant $u(t) = t$ (et donc $u'(t) = 1$), et $v'(t) = \frac{t}{(1+t^2)^2}$ où on peut reconnaître une dérivée d'inverse et prendre $v(t) = -\frac{1}{2} \frac{1}{1+t^2}$. On obtient alors

$$\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt = \left[-\frac{1}{2} \frac{t}{1+t^2} \right]_0^x + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = -\frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \text{Arctan}(x) = -\frac{1}{2} x^2 f'(x).$$

- Dans l'égalité obtenue à la question précédente, l'intégrale de gauche est positive si $x > 0$ (intégrale d'une fonction positive entre deux bornes placées en ordre croissant), donc f' est négative et f décroissante sur $]0, +\infty[$. Par parité (ou en faisant la même étude de signe), elle sera croissante sur $] -\infty, 0[$. On peut donc dresser le tableau de variations suivant (les limites s'obtiennent car la fonction arctangente est bornée sur \mathbb{R}):

**B. Étude d'une deuxième fonction.**

- Sachant que f est paire, en effectuant le changement de variable évident $u = -t$, $g(-x) = -\frac{1}{x} \int_0^{-x} f(t) dt = -\frac{1}{x} \int_0^x -f(-u) du = \frac{1}{x} \int_0^x f(u) du = g(x)$, donc g est également une fonction paire. Une autre façon de voir les choses : sans le facteur $\frac{1}{x}$, g serait la primitive de f qui s'annule en 0, qui est une fonction impaire. Avec le produit par $\frac{1}{x}$, on retrouve bien une fonction paire.
- La fonction g est rien en fait le taux d'accroissement en 0 de la primitive de f s'annulant en 0, donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

On peut à nouveau effectuer un prolongement par continuité en 0.

- L'encadrement est évident pour $x = 0$. Supposons $x > 0$, alors f est décroissante sur l'intervalle $[0, x]$ donc, $\forall t \in [0, x], f(x) \leq f(t) \leq 1$. On peut intégrer cet encadrement entre 0 et x pour en déduire que $x f(x) \leq \int_0^x f(t) dt \leq x$, donc en divisant tout par x qui est positif, on trouve bien $f(x) \leq g(x) \leq 1$. Si $x < 0$, la parité de toutes les fonctions permet d'obtenir le même encadrement.

4. Notons F la primitive de f s'annulant en 0. Puisque $g(x) = \frac{F(x)}{x}$, on a $g'(x) = \frac{xf(x)-F(x)}{x^2} = \frac{f(x)-g(x)}{x}$. Comme on vient de prouver qu'on a toujours $g(x) \geq f(x)$, cette dérivée est du signe opposé à celui de x . La fonction g est donc, comme f , croissante sur $] -\infty, 0]$ puis décroissante sur $[0, +\infty[$.
5. On peut très brutalement majorer la fonction Arctan par $\frac{\pi}{2}$ pour obtenir $\frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt \leq \frac{\pi}{2x} \int_1^x \frac{1}{t} dt = \frac{\pi \ln(x)}{2x}$. Par croissance comparée cette expression tend vers 0, et comme $\frac{1}{x} \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt \geq 0$, le théorème des gendarmes permet de conclure. D'autre part, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{f(t)}{t} dt = 0$ (l'intégrale étant constante, c'est évident), il suffit d'additionner cette limite à la précédente pour en déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

C. Une suite récurrente.

1. La positivité est évidente. De plus, $\frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{2} = \frac{2x-1-x^2}{2(1+x^2)} = -\frac{(x-1)^2}{2(1+x^2)} \leq 0$, ce qui prouve la majoration souhaitée.
2. L'intégrale censée majorer $|g'(x)|$ se calcule : $\frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} dt = \frac{1}{x^2} \int_0^x 1 - \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{x - \text{Arctan}(x)}{x^2} = \frac{1-f(x)}{x}$. Or, on a prouvé plus haut que $|g'(x)| = \frac{|f(x)-g(x)|}{x} \leq \frac{1-f(x)}{x}$ à cause de l'encadrement de la question B.3. En exploitant désormais la question précédente, on en déduit que $|g'(x)| \leq \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t}{2} dt = \frac{1}{x^2} \times \frac{x^2}{4} = \frac{1}{4}$. Bien entendu, la fonction g' étant impaire, l'inégalité reste vraie si $x < 0$.
3. Posons donc $h(x) = g(x) - x$, la fonction h est dérivable sur \mathbb{R} et $h'(x) = g'(x) - x < 0$ puisque $g'(x) \leq \frac{1}{4}$. La fonction h est donc strictement décroissante sur \mathbb{R} . De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - x = -\infty$ d'après la question B.5, et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ par parité, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$. La fonction h effectue donc une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et en particulier s'annule une seule fois, ce qui prouve que g admet un unique point fixe α . Enfin, on calcule $h(0) = g(0) = 1$ et $h(1) = g(1) - 1 \leq 0$ (puisqu'on sait que $g(x) \leq 1$) pour en déduire que $\alpha \in]0, 1[$ (théorème des valeurs intermédiaires).
4. On peut appliquer l'IAF sur l'intervalle \mathbb{R} aux valeurs $x = u_n$ et $y = \alpha$ pour obtenir directement $|g(u_n) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$, soit $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$. On prouve ensuite par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4^n} |u_0 - \alpha|$ (on ne peut pas faire plus précis sans connaître la valeur de u_0). L'initialisation pour $n = 0$ est évidente, et l'hérédité également en exploitant l'inégalité obtenue grâce à l'IAF et l'hypothèse de récurrence: $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4} \times \frac{1}{4^n} |u_0 - \alpha| = \frac{1}{4^{n+1}} |u_0 - \alpha|$. L'encadrement $0 \leq |u_n - \alpha| \leq \frac{|u_0 - \alpha|}{4^n}$ permet alors, via le théorème des gendarmes, d'affirmer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0$, et donc que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha.$$