Exercice 4

1] $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (1\,2\,3) \circ (4\,6)$

Donc $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon((1\,2\,3)) \times \varepsilon((4\,6)) = (-1)^{3-1} \times (-1)^{2-1} = \boxed{-1}$

On a $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

2] a) A_6 est le groupe des permutations de S_6 qui sont paires, c'est à dire dont la signature vaut 1.

$$A_6 = \ker(\varepsilon) = \{\sigma \in S_6 \,/\, \varepsilon(\sigma) = 1\}.$$

D'après le cours, $\boxed{\text{Card}(A_6)} = \frac{6!}{2} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}{2}$

$= 3 \times 4 \times 5 \times 6 = \boxed{360}$

b) $\varphi : \begin{cases} A_6 \to A_6 \\ \sigma \mapsto (1\,2\,3)\,\sigma \end{cases}$

Mq φ est bien définie, autrement dit vérifions que pour tout $\sigma \in A_6$, on a bien $(123)\,\sigma \in A_6$.

Soit $\sigma \in A_6$, alors $\varepsilon(\sigma) = 1$ par définition

et $\varepsilon((123)\sigma) = \underbrace{\varepsilon((123))}_{=(-1)^{3-1}} \times \underbrace{\varepsilon(\sigma)}_{=1} = \boxed{1}$

donc $(1\,2\,3)\,\sigma \in A_6$, ce qu'il fallait vérifier

De plus, soit $\tau \in A_6$, alors $\varphi(\sigma) = \tau$

$\iff (123)\sigma = \tau$

$\iff \sigma = (1\,2\,3)^{-1}\,\tau$

$\iff \sigma = (3\,2\,1)\,\tau$

(par la même raison que précédemment,
$(321)\tau \in A_6$).

Ainsi, $\forall \tau \in A_6$, τ admet un unique antécédent dans A_6, i.e φ est bijective.

c) On a $\varphi(id_{[\![1,6]\!]}) = (123) \neq id_{[\![1,6]\!]}$

or un morphisme envoie toujours l'élément neutre sur l'élément neutre.

Donc φ n'est pas un morphisme.

d) Mq H est un sous-groupe de A_6.

① $H \subset A_6$ car il est composé exclusivement de permutation appartenant à A_6.

② On remarque que $(132) = (321) = (123)^{-1}$

donc $\boxed{(123)\, id\, (132) = (123)(123)^{-1} = id}$

autrement dit, $\boxed{id \in H}$

③ Soit σ et τ deux éléments de H

alors $(123)\, \sigma\, (123)^{-1} = \sigma$ (*1)

et $(123)\, \tau\, (123)^{-1} = \tau$

en appliquant l'inverse on trouve aussi

$(123)\, \tau^{-1}\, (123)^{-1} = \tau^{-1}$ (*2)

puis en composant (*1) par (*2)

On trouve $\underbrace{(123)\sigma(123)^{-1}}_{=\sigma} \underbrace{(123)\tau^{-1}(123)^{-1}}_{=\tau^{-1}} = \sigma\tau^{-1}$

i.e $\quad (123)\,\sigma\tau^{-1}(123)^{-1} = \sigma\tau^{-1}$

Donc $\quad \sigma\tau^{-1} \in H$

<u>Conclusion</u> H est un sous groupe de $\mathcal{A}_6$.

On peut remarquer que $H \neq \{id\}$ car

$(1\,2\,3) \in H$: en effet $(123)(123)(123)^{-1} = (123)$

On a aussi $H \neq \mathcal{A}_6$ pour cela, il suffit de trouver un 3-cycle $(a, b\, c) \in \mathcal{A}_6$ / $(123)(a\,b\,c)(123)^{-1} \neq (a\,b\,c)$

ie un 3 cycle qui ne commute pas avec $(a\,b\,c)$

Pour cela on peut choisir $(3\,4\,5)$: on a

$$(123)(345) = (12)(23)(34)(45) = (1\,2\,3\,4\,5)$$

mais $\quad (345)(123) = (4\,5\,3)(3\,1\,2) = (45)(53)(31)(12) = (4\,5\,3\,1\,2)$
$= (1\,2\,4\,5\,3)$

Or $\quad (1\,2\,4\,5\,3) \neq (1\,2\,3\,4\,5)$

e] Dans $\mathcal{A}_6$, toute permutation est

- l'identité - un 3-cycle
- Un 5-cycle
- Un produit de 2 3-cycles à supports disjoints
- Un produit d'une transposition avec un 4-cycle à supports disjoints
  ↳ car $(-1)^{2-1} \times (-1)^{4-1} = 1$

Ou le produit de 2 transpositions à supports disjoints.

f] Dénombrons les 3-cycles de A_6.

Former un 3-cycle revient :

- À choisir son support $\{a,b,c\}$ → Pour cela, il y a $\binom{6}{3}$ choix possibles

- Une fois le support choisi, il y a 2 sens de parcours possibles  ou  : 2 choix

donc le nombre de 3-cycles est $\binom{6}{3}\times 2 = \frac{6\times 5\times 4}{2\times 3}\times 2 = \frac{6\times 5\times 4}{3} = 2\times 5\times 4 = \boxed{40}$

Autre méthode

Former un 3-cycle revient à choisir un 3-arrangement $(a\ b\ c)$

- Pour le a : 6 choix
- Pour le b : 5 choix
- Pour le c : 4 choix.

Étant donné qu'un même 3 cycle peut s'écrire de 3 manières distinctes puisque $(a\ b\ c) = (b\ c\ a) = (c\ a\ b)$, on a comptabilisé chacun d'entre eux 3 fois

Ainsi, leur nombre est de $\frac{6\times 5\times 4}{3} = 2\times 5\times 4 = \boxed{40}$