Exercice 3

1] a] Choisir une position revient à décider pour chacune des 16 cases si elle est occupée par
- P
- C
- T
- ou vide

Ceci revient à choisir une fonction de

$$[\![1,16]\!] \longrightarrow \{P, C, T, \text{Case-vide}\}$$

il y en a 4^{16}.

b] Par le même argument on dénombre les fonctions de $[\![1,16]\!] \longrightarrow \{P, \text{Case-vide}\}$ il y en a 2^{16}.

c] Par le même argument, le nb de positions SANS le moindre cavaliers est le nb de fonctions de $[\![1,16]\!] \longrightarrow \{P, T, \text{Case vide}\}$ soit 3^{16}. Par complémentaire il y a

$4^{16} - 3^{16}$ position avec au moins un cavalier.

d] Cela revient à choisir
- 4 cases pour y disposer les pions : $\binom{16}{4}$ choix possibles
- 4 cases sur les 12 restantes pour les cavaliers $\binom{12}{4}$ choix possibles
- 4 cases sur les 8 restantes pour les tours $\binom{8}{4}$ choix possibles

Il y a donc $\dfrac{16!}{4! \times \cancel{12!}} \times \dfrac{\cancel{12!}}{4! \times \cancel{8!}} \times \dfrac{\cancel{8!}}{4! \times 4!} = \dfrac{16!}{(4!)^4}$ positions possibles.

e] Cela revient à

- choisir 8 cases qui seront occupées : $\binom{16}{8}$ choix possibles

- déterminer une fonction de ces 8 cases vers $\{P, C, T\}$: 3^8 choix possibles

donc il y a $\binom{16}{8} \times 3^8$ telles positions.

f) • Il faut choisir sur

L_1 : un numéro de colonne occupé : 4 choix

puis un type de pièce . 3 choix

→ idem pour L_2 : 12 choix

——— L_3 12 choix

——— L_4 . 12 choix

Ce qui donne 12^4 positions possibles.

g) Nb de positions avec 1 pièce de chaque : $16 \times 15 \times 14$

——— 2 pièces de chaque $\binom{16}{2} \times \binom{14}{2} \times \binom{12}{2}$

$$= \frac{16!}{2! \times 14!} \times \frac{\cancel{14!}}{2 \times 12!} \times \frac{\cancel{12!}}{2 \times 10!}$$

$$= \frac{16!}{8 \times 10!}$$

Avec 3 pièces de chaque : $\binom{16}{3} \times \binom{13}{3} \times \binom{10}{3} = \frac{16!}{3! \times \cancel{13!}} \times \frac{\cancel{13!}}{3! \times \cancel{10!}} \times \frac{\cancel{10!}}{3! \times 7!}$

$$= \frac{16!}{(3!)^3 \times 7!}$$

Avec 4 de chaque : Question 1.d)

Avec 5 : $\binom{16}{5} \times \binom{11}{5} \times \binom{6}{5} = \frac{16!}{5! \times \cancel{11!}} \times \frac{\cancel{11!}}{5! \times \cancel{6!}} \times \frac{\cancel{6!}}{5! \times 1!} = \frac{16!}{(5!)^3}$

En sommant on obtient

$$16! \times \left(\frac{1}{13!} + \frac{1}{8 \times 10!} + \frac{1}{(3!)^3 \times 7!} + \frac{1}{(4!)^4} + \frac{1}{(5!)^3} \right)$$

2] a] Une partie consiste en une liste de coups, sachant que le premier coup se fait de 16 façons possibles, le 2^{nd} de 15 possibles, etc.

Nb de partie $= 16 \times 15 \times \ldots \times 1$

$= \boxed{16!}$

b] Une position finale consiste en : la position des 8 pions blancs : $\boxed{\binom{16}{8} \text{ possibilités}}$

c] 1^{er} coup : 3×16 choix possibles,
2^e coup 3×15 choix possibles.
etc.

Nb de parties possibles : $(3 \times 16) \times (3 \times 15) \times \ldots \times (3 \times 1)$

$= \boxed{3^{16} \times 16!}$