Exercice 2

U_1 $\qquad\qquad$ U_2

1] Le 1^{er} tirage s'effectuant dans U_1, on a $b_1 = \frac{2}{4}$ car chaque boule a la même probabilité d'être tirée.

Ainsi $b_1 = \frac{1}{2}$.

En appliquant la F.P.T avec le S.C.E $(B_1, \overline{B_1})$

on a
$$\mathbb{P}(B_2) = \underbrace{\mathbb{P}(B_1)}_{= \frac{1}{2}} \times \underbrace{\mathbb{P}(B_2 \mid B_1)}_{= \frac{1}{2} \text{ car on tire la } 2^e \text{ boule dans } U_1} + \underbrace{\mathbb{P}(\overline{B_1})}_{= \frac{1}{2}} \times \underbrace{\mathbb{P}(B_2 \mid \overline{B_1})}_{= \frac{1}{4} \text{ car on tire la } 2^e \text{ boule dans } U_2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \boxed{\frac{3}{8}}$$

En appliquant la F.P.T avec le S.C.E $(B_2, \overline{B_2})$ on a

$$\mathbb{P}(B_3) = \underbrace{\mathbb{P}(B_2)}_{= \frac{3}{8}} \times \underbrace{\mathbb{P}(B_3 \mid B_2)}_{= \frac{1}{2} \text{ (on tire dans } U_1)} + \underbrace{\mathbb{P}(\overline{B_2})}_{= \frac{5}{8}} \times \underbrace{\mathbb{P}(B_3 \mid \overline{B_2})}_{= \frac{1}{4} \text{ : (on tire dans } U_2)}$$

$$= \frac{3}{16} + \frac{5}{32} = \frac{6+5}{32} = \boxed{\frac{11}{32}}$$

- $\mathbb{P}_{B_2}(B_3) = \boxed{\frac{1}{2}}$ (tirage effectué dans U_1)
- $\mathbb{P}_{B_3}(B_2) \underset{\text{Formule de Bayes}}{=} \mathbb{P}_{B_2}(B_3) \times \frac{\mathbb{P}(B_2)}{\mathbb{P}(B_3)} = \frac{1}{2} \times \frac{3/8}{11/32} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{11} \times \frac{32}{8}$

$$= \boxed{\frac{6}{11}}$$

Comme $\mathbb{P}_{B_2}(B_3) = \frac{1}{2} \neq \mathbb{P}(B_3) = \frac{11}{32}$

les événements B_2 et B_3 ne sont pas indépendants.

3] L'évenement "Ne tirer que des boules bleues lors des n premiers tirages" est l'intersection

$$B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n.$$

D'après la F.P. composées on a

$$\mathbb{P}(B_1 \cap \dots \cap B_n) = \underbrace{\mathbb{P}(B_1)}_{\frac{1}{2}} \times \underbrace{\mathbb{P}(B_2|B_1)}_{\frac{1}{2}\text{ : on tire dans } U_1} \times \underbrace{\mathbb{P}(B_3|B_1 \cap B_2)}_{\frac{1}{2}\text{ idem}} \times \dots \times \underbrace{\mathbb{P}(B_n|B_1 \cap \dots \cap B_{n-1})}_{=\frac{1}{2}\text{ idem}}$$

donc cette probabilité vaut $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Ne tirer que des boules rouges consiste en l'événement $\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \dots \cap \overline{B_n}$ dont la probabilité vaut

d'après la F.P.C

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{B_i}\right) = \underbrace{\mathbb{P}(\overline{B_1})}_{\frac{1}{2}\text{ : tirage dans } U_1} \times \underbrace{\mathbb{P}(\overline{B_2}|\overline{B_1})}_{=\frac{3}{4}\text{ : tirage dans } U_2} \times \dots \times \underbrace{\mathbb{P}(\overline{B_n}|\overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_{n-1}})}_{=\frac{3}{4}\text{ : tirage dans } U_2}$$

Ainsi $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{B_i}\right) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

Notons Alt l'événement : avoir une alternance de couleurs sur les n premiers tirages.

Il y a 2 manières possible de réaliser ceci

- Commencer par boule bleue puis alterner OU
- Commencer par boule rouge puis alterner.

Autrement dit

$$A|t = \left(B_1 \cap \overline{B_2} \cap B_3 \cap \overline{B_4} \cap \dots \cap \overline{B_{2n}}\right) \sqcup \left(\overline{B_1} \cap B_2 \cap \overline{B_3} \cap B_4 \cap \dots \cap B_{2n}\right)$$

D'après la F.P.C

$$\mathbb{P}(B_1 \cap \overline{B_2} \cap \dots \cap \overline{B_{2n}}) = \underbrace{\mathbb{P}(B_1)}_{=\frac{1}{2}} \times \underbrace{\mathbb{P}(\overline{B_2} | B_1)}_{=\frac{1}{2} : \text{ On tire dans } U_1} \times \underbrace{\mathbb{P}(B_3 | \overline{B_2})}_{=\frac{1}{4} : \text{ on tire dans } U_2} \times \underbrace{\mathbb{P}(\overline{B_4} | B_3)}_{=\frac{1}{2} : \text{ On tire dans } U_1} \times \dots$$

$$= \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}$$

et

$$\mathbb{P}(\overline{B_1} \cap B_2 \cap \overline{B_3} \cap B_4 \cap \dots \cap B_{2n})$$

$$= \underbrace{\mathbb{P}(\overline{B_1})}_{=\frac{1}{2}} \times \underbrace{\mathbb{P}(B_2 | \overline{B_1})}_{=\frac{1}{4}} \times \underbrace{\mathbb{P}(\overline{B_3} | B_2)}_{=\frac{1}{2}} \times \underbrace{\mathbb{P}(B_4 | \overline{B_3})}_{=\frac{1}{4}} \times \dots = \left(\frac{1}{8}\right)^n$$

Donc $\boxed{\mathbb{P}(A|t) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{8}\right)^n = 2 \times \left(\frac{1}{8}\right)^n + \left(\frac{1}{8}\right)^n = \frac{3}{8^n}}$

4 Remarquons que lorsque $n \geq 2$, $A_n = B_{n-1}$
et $A_1 = \Omega$ puisque le 1er tirage se fait dans U_1

On peut appliquer la F.P.T avec le S.C.E $(A_n, \overline{A_n})$:

$$\boxed{u_{n+1}} = \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}(A_{n+1} | A_n) + \mathbb{P}(\overline{A_n}) \times \mathbb{P}(A_{n+1} | \overline{A_n})$$

$$= u_n \times \frac{1}{2} + (1 - u_n) \times \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{4} u_n + \frac{1}{4}}$$

5) On a $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_{n+1} = \frac{1}{4} u_n + \frac{1}{4}$

u est arithmético - géométrique

Résolvons $x = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{4}x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{1}{3}}$

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n - \frac{1}{3}$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4} u_n + \underbrace{\frac{1}{4} - \frac{1}{3}}_{= -\frac{1}{12}}}$

$$= \frac{1}{4}\left(u_n - \frac{1}{3}\right) = \boxed{\frac{1}{4} v_n}$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $v_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} v_1$

Or $v_1 = u_1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Ainsi $v_n = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{8}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$

et $u_n = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$

Ainsi $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{3}}$

6) Comme $B_n = A_{n+1}$ on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = u_{n+1}$

ie $\boxed{b_n} = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

$$= \boxed{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

Au bout d'un grand nombre de tirage, il y a une probabilité très proche de $\frac{1}{3}$ que l'on tire une boule bleue.

$\boxed{7}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^k\right) = \frac{n}{3} + \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^k$

$$= \frac{n}{3} + \frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\underbrace{1-1/4}_{=3/4}}$$

$$= \frac{n}{3} + \frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{4}{3}\times\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

$$= \frac{n}{3} + \frac{2}{9}\times\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

Cette somme correspond au nombre moyen de tirage de boules bleues (l'espérance exactement).

$\boxed{8}$ $\boxed{a}$ $b_1 = \frac{1}{2}$

D'après la F.P.T avec le s.c.e $(B_1, \overline{B_1})$ on a

$$\mathbb{P}(B_2) = \underbrace{\mathbb{P}(B_1)}_{=\frac{1}{2}} \times \underbrace{\mathbb{P}(B_2 \mid B_1)}_{=\frac{1}{3}\text{ : pas de remise}} + \underbrace{\mathbb{P}(\overline{B_1})}_{=\frac{1}{2}} \times \underbrace{\mathbb{P}(B_2 \mid \overline{B_1})}_{=\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{7}{12}$$

$$= \boxed{\frac{7}{24}}$$

puis $\mathbb{P}(B_3) = \underbrace{\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3)}_{=0\text{ : impossible : que 2 boules bleues à tirer}} + \underbrace{\mathbb{P}(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap B_3)}_{=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}} + \underbrace{\mathbb{P}(B_1 \cap \overline{B_2} \cap B_3)}_{=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}} + \underbrace{\mathbb{P}(\overline{B_1} \cap B_2 \cap B_3)}_{=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}}$

$$= \frac{1}{8}\times\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{6+4+3}{6}\right)$$

$$= \boxed{\frac{13}{48}}$$

b) Le procédé peut s'arrêter

- Si U_1 est vide alors qu'on vient de tirer une boule bleue
- Si U_2 ———————————————— rouge.

Mais vider l'urne 1 oblige à y avoir tiré les 2 boules rouges donc à avoir effectué au moins 2 tirages dans U_2 en plus des 4 pour vider U_1 donc au moins 6 tirages.

– Pour vider l'urne 2 et tirer une rouge le plus rapidement possible,

$$\overline{B_1} \cap \underbrace{\overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap \overline{B_4} \cap B_5}_{\text{Dans l'urne 2}} \cap \overline{B_6}$$ est un événement possible

– Le plus long procédé possible est de 8 tirages (car delà, il n'y a plus aucune boule).

Par exemple,

$$\underbrace{B_1 \cap B_2 \cap \overline{B_3}}_{\text{Dans } U_1} \cap \underbrace{\overline{B_4} \cap \overline{B_5} \cap \overline{B_6} \cap B_7}_{\text{Dans } U_2} \cap \underbrace{\overline{B_8}}_{\text{On tire la boule rouge restante dans } U_1}$$

est une possibilité

Donc : minimum <u>6 tirages</u> maximum : <u>8 tirages</u>

c] Pour terminer au bout de 6 tirages il faut donc

- Avoir tiré une rouge dans l'urne 1

Puis tirer un certain nb de boules rouges dans U_2 : 0 ou 1 ou 2 ou 3

- Puis tirer la bleue, revenir à l'urne 1, tirer une rouge, puis tirer toutes les rouges restantes.

- La probabilité cherchée correspond donc à l'événement

$$(\overline{B_1}\cap B_2\cap\overline{B_3}\cap\overline{B_4}\cap\overline{B_5}\cap\overline{B_6})\sqcup(\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\cap B_3\cap\overline{B_4}\cap\overline{B_5}\cap\overline{B_6})$$
$$\sqcup(\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\cap\overline{B_3}\cap B_4\cap\overline{B_5}\cap\overline{B_6})$$
$$\sqcup(\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\cap\overline{B_3}\cap\overline{B_4}\cap B_5\cap\overline{B_6})$$

Or

$$\mathbb{P}(\overline{B_1}\cap B_2\cap\overline{B_3}\cap\overline{B_4}\cap\overline{B_5}\cap\overline{B_6}) \underset{\substack{\text{Formule}\\ \text{proba.}\\ \text{composées}}}{=} \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times1\times1\times1$$

$$\mathbb{P}(\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\cap B_3\cap\overline{B_4}\cap\overline{B_5}\cap\overline{B_6}) = \frac{1}{2}\times\frac{\cancel{3}}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{\cancel{3}}\times1\times1$$

$$\mathbb{P}(\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\cap\overline{B_3}\cap B_4\cap\overline{B_5}\cap\overline{B_6}) = \frac{1}{2}\times\frac{\cancel{3}}{4}\times\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{\cancel{2}}\times1$$

$$\mathbb{P}(\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\cap\overline{B_3}\cap\overline{B_4}\cap B_5\cap\overline{B_6}) = \frac{1}{2}\times\frac{\cancel{3}}{4}\times\frac{\cancel{2}}{3}\times\frac{1}{\cancel{2}}\times1\times\frac{1}{\cancel{3}}$$

Donc la probabilité cherchée vaut

$$4\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{6}}$$