Exercice 1

1] Calculons A^2 :

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 & 0 & 16 \\ -8 & 1 & -8 \\ -8 & 0 & -7 \end{pmatrix} = A^2$$

Ainsi $\quad A^2 = -2A + 3I_3$

b] On a $\quad A^2 + 2A = 3I_3 \quad$ i.e. $\quad A \times \frac{1}{3}(A + 2I_3) = I_3$.

or A commute avec elle-même et I_3 donc le produit dans l'autre sens vaut aussi I_3

ainsi A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{3}(A + 2I_3)$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 & 0 & -8 \\ 4 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

c] $\forall n \in \mathbb{N}$, on définit $\mathcal{P}(n)$: " $\exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2 / A^n = a_n A + b_n I_3$ "

Initialisation $\quad A^0 = I_3 = 1 \times I_3 + 0 \times A$ donc

avec $\begin{cases} a_0 = 0 \\ b_0 = 1 \end{cases}$ on prouve $\mathcal{P}(0)$

Hérédité soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}(n)$.

Alors $\quad A^n = a_n A + b_n I$

On multiplie par A : $\quad A^{n+1} = a_n A^2 + b_n A$

donc $A^{n+1} = a_n(-2A+3I_3) + b_n A$

$= \underbrace{(-2a_n+b_n)}_{:=a_{n+1}} A + \underbrace{3a_n}_{:=b_{n+1}} I_3$ ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$

d] On a $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} a_{n+1} = -2a_n + b_n \\ b_{n+1} = 3a_n \end{cases}$

donc $\boxed{a_{n+2} = -2a_{n+1} + b_{n+1} = -2a_{n+1} + 3a_n}$: suite récurrente linéaire.

Résolvons l'E.C $X^2+2X-3=0$ $\Delta = 4-4\times(-3) = 16$

Les 2 racines sont $\frac{-2\pm4}{2} = -3$ et 1

Donc $\exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 / \forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \alpha(-3)^n + \beta$

Or $a_0 = 0$ donc $\alpha+\beta=0$ i.e $\beta=-\alpha$

et $a_1 = 1$ (Car $A^1 = \underset{a_1}{\underset{\shortparallel}{1}}.A + \underset{b_1}{\underset{\shortparallel}{0}}.I_3$) donc $-3\alpha-\alpha=1$ i.e $\alpha = -\frac{1}{4}$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \boxed{-\frac{1}{4}\times(-3)^n + \frac{1}{4}}$.

et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = 3a_{n-1} = -\frac{1}{4}\times3\times\left(-\frac{1}{3}\right)\times(-3)^n + \frac{3}{4}$

$= \boxed{\frac{1}{4}\times(-3)^n + \frac{3}{4}}$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \left(-\frac{1}{4}(-3)^n + \frac{1}{4}\right)A + \left(\frac{1}{4}\times(-3)^n + \frac{3}{4}\right)I_3$

$= \frac{1}{4}\left((-3)^n\cdot(-A+I_3) + (A+3I_3)\right)$

(et $A^0 = I_3$)

$\boxed{2}$ $\boxed{a}$ On a
$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = J^2$$

Donc $J^2 = J$ puis par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J^n = J$.

⚠ pour $n=0$, ceci est faux, car $J^0 = I_3 \neq J$.

$\boxed{b}$ On a $J = \frac{1}{4}(A + 3I_3)$ i.e. $4J - 3I_3 = A$.

Comme $4J$ commute avec $-3I_3$ on peut appliquer la formule du binôme :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{(4J)^k}_{= 4^k J^k = \begin{cases} 4^k J & \text{si } k \neq 0 \\ I_3 & \text{si } k = 0 \end{cases}} \times (-3I_3)^{n-k}$$

donc $A^n = \binom{n}{0} I_3 \times (-3)^n I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^k J^k \times (-3)^{n-k} I_3$.

$$= (-3)^n I_3 + \Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^k \times (-3)^{n-k}}_{= (4-3)^n - (-3)^n}\Big) J$$

$= (4-3)^n - (-3)^n$: formule du binôme à laquelle on a retirée le terme d'indice 0

$$= (-3)^n I_3 + \left(1 - (-3)^n\right) J$$

c) Pour $n=-1$ cette expression vaut $-\frac{1}{3} I_3 + \frac{4}{3} J$

Or $A^{-1} = \frac{1}{3}(\underset{4J-3I_3}{\underset{\parallel}{A}} + 2I_3) = \frac{1}{3}(4J - I_3)$

donc cette expression vaut bien A^{-1} lorsque on l'utilise avec $\boxed{n=-1}$

3) Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ résolvons

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -2x + z = a \\ x + y = b \\ x - z = c \end{cases} \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \end{array} \iff \begin{cases} -2x + z = a \\ 2y + z = a + 2b \\ -z = a + 2c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2x = a - z = 2a + 2c \\ 2y = a + 2b + a + 2c = (2a+2b+c) \\ z = -a - 2c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -a - c \\ y = a + b + c \\ z = -a - 2c \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

b)

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{=P^{-1}A} \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=P^{-1}AP}$$

donc $\boxed{P^{-1}AP = \mathrm{diag}(-3, 1, 1)}$

c) On a $P^{-1}AP = D$ donc $A = PDP^{-1}$.

Par récurrence on prouve que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\underbrace{A^n = PD^nP^{-1}}_{:= \mathcal{H}(n)}$

$\boxed{\text{Initialisation}}$ $\left.\begin{array}{l} \bullet\ A^0 = I_3 \\ \bullet\ PD^0P^{-1} = I_3 \end{array}\right\}$ cela prouve $\mathcal{H}(0)$

$\boxed{\text{Hérédité}}$ soit $n \in \mathbb{N}$ on suppose $\mathcal{H}(n)$ i.e

$A^n = PD^nP^{-1}$

et donc $A^{n+1} = (PD^nP^{-1}) \times (PDP^{-1}) = PD^{n+1}P^{-1}$

ce qui prouve $\mathcal{H}(n+1)$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = P \times \text{diag}\left((-3)^n, 1, 1\right) P^{-1}$

4] a] $\boxed{MA = AM} \Leftrightarrow MPDP^{-1} = PDP^{-1}M$

$\Leftrightarrow P^{-1}MPDP^{-1} = \cancel{P^{-1}P}DP^{-1}M$

en multipliant à gauche par P^{-1}

$\Leftrightarrow P^{-1}MPDP^{-1}P = DP^{-1}MP$

en multipliant à droite par P

$\Leftrightarrow (P^{-1}MP)D = D(P^{-1}MP)$

$\Leftrightarrow \boxed{ND = DN}$

b] Soit $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$$N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = DN$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3a & b & c \\ -3d & e & f \\ -3g & h & i \end{pmatrix} = ND$$

Ainsi $DN = ND \Leftrightarrow \begin{cases} -3a = -3a \\ b = -3b \\ c = -3c \\ -3d = d \\ e = e \\ f = f \\ -3g = g \\ h = h \\ i = i \end{cases} \Leftrightarrow b = c = d = g = 0$

L'ensemble des matrices qui commutent avec D est l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{pmatrix} \text{ avec } (a,e,f,h,i) \in \mathbb{R}^5.$$

$\boxed{c}$ M commute avec A

$$\iff \exists (a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5 / \ P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix}$$

$$\iff \exists (a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5 / \ M = P \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= a\, PE_{11}P^{-1} + b\, PE_{2,2}P^{-1}$$
$$+ c\, PE_{2,3}P^{-1} + d\, PE_{2,3}P^{-1}$$
$$+ e\, PE_{3,3}P^{-1}$$

Les 5 matrices peuvent par exemple être

$PE_{11}P^{-1}$, $PE_{22}P^{-1}$; $PE_{2,3}P^{-1}$; $PE_{2,3}P^{-1}$ et $PE_{3,3}P^{-1}$