

DS n°6.**Durée : 4 heures**

L'évaluation se faisant principalement sur la qualité de la rédaction, vous soignerez la précision et la concision des arguments que vous avancerez au cours des démonstrations ainsi que la présentation de vos résultats en les encadrant ou les soulignant.

Vous n'oublierez pas de faire une marge à gauche sur chaque feuille, de bien inscrire le numéro des exercices ainsi que de numéroter vos copies avant de les rendre.

La calculatrice est interdite.

Question de cours

Soit $f :]\alpha, \beta[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

Soit $a \in]\alpha, \beta[$, rappeler la définition de " a est un point critique de f " et montrer que si f admet un extremum en a , alors a est un point critique. La réciproque est-elle vraie (il faut argumenter) ?

Exercice 1 : une équation fonctionnelle

On cherche à déterminer toutes les fonctions continues sur \mathbb{R} vérifiant la condition suivante (notée (C) par la suite):
 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(x)f(y)$.

1. Quelles sont les fonctions constantes vérifiant la condition (C) ?
2. On suppose pour toute la suite de l'exercice que f n'est pas la fonction nulle et vérifie la condition (C). Montrer que f est une fonction paire.
3. Montrer que $f(0) = 1$.
4. Supposons que a est un réel strictement positif vérifiant $f(a) = 0$. En posant $u_n = \frac{a}{\sqrt{2}^n}$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) = 0$. Que peut-on en déduire sur la fonction f ?
5. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$.
6. Pour tout réel positif x , on pose $g(x) = \ln(f(\sqrt{x}))$.
 - (a) Montrer que g est définie et continue sur $[0, +\infty[$.
 - (b) Montrer que g vérifie l'équation fonctionnelle suivante : $g(x+y) = g(x) + g(y)$.
 - (c) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+, g(nx) = ng(x)$.
 - (d) Montrer que, si x est un nombre rationnel positif, $g(x) = xg(1)$.
 - (e) En exploitant la densité des rationnels dans \mathbb{R}^+ , en déduire l'existence d'un réel a tel que, $\forall x \in \mathbb{R}^+, g(x) = ax$.
 - (f) En déduire toutes les fonctions f vérifiant la condition (C).

Exercice 2 : une famille de fonctions

Pour tout entier naturel n , on définit une fonction L_n sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $L_n(x) = \frac{e^x}{n!} f_n^{(n)}(x)$, où les fonctions f_n sont elle-mêmes définies par $f_n(x) = e^{-x} x^n$.

1. Faire l'étude des fonctions f_n sur l'intervalle $[0, +\infty[$ (variations, limites, préciser sur quel(s) intervalle(s) la fonction est convexe).
2. Tracer dans un même repère une allure soignée des courbes représentatives de f_0 , de f_1 et de f_2 .
3. Calculer L_0, L_1 et L_2 .
4. Vérifier que, pour $n \leq 2$, $L_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} x^k$.
5. Démontrer, sans faire de récurrence, la formule précédente pour tout entier n .
6. À l'aide de la formule de Leibniz, montrer que $f_{n+1}^{(n+1)}(x) = x f_n^{(n+1)}(x) + (n+1) f_n^{(n)}(x)$.
7. En déduire la relation $(n+1) L_{n+1}(x) = x L_n'(x) + (n+1-x) L_n(x)$.
8. Montrer que, si $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, alors $\frac{1}{(k-1)!} \binom{n}{k} + \frac{n+1}{k!} \binom{n}{k} + \frac{1}{(k-1)!} \binom{n}{k-1} = \frac{n+1}{k!} \binom{n+1}{k}$.
9. Redémontrer par récurrence le résultat de la question 5.
10. Montrer que, $\forall n \geq 1$, $L_n'(x) - L_{n+1}'(x) = L_n(x)$.

Exercice 3 : Suites récurrentes et matrices

L'objectif est de déterminer une expression explicite des deux suites réelles u et v définies par $u_0 = v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 3v_n \end{cases}$$

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que la matrice $N = A - 2I_2$ est nilpotente.
2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de la matrice A^n en fonction de I_2, A et n .
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$ puis exprimer U_n en fonction de U_0, U_1 et n .
4. Déduire des questions précédentes, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de u_n et v_n en fonction de n .

Problème : Analyse**A. Étude d'une première fonction.**

On définit une fonction f sur \mathbb{R}^* par

$$f(x) = \frac{\text{Arctan}(x)}{x}.$$

1. Montrer qu'on peut prolonger la fonction f par continuité en 0 (penser à un taux d'accroissement). On continuera à noter f la fonction ainsi prolongée.
2. Quelle est la parité de la fonction f ? En admettant que f est dérivable en 0, que vaut nécessairement $f'(0)$?
3. Calculer la dérivée f' de la fonction f .
4. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt = -\frac{1}{2}x^2 f'(x).$$

5. Étudier les variations de la fonction f , puis tracer une allure soignée de sa courbe représentative.

B. Étude d'une deuxième fonction.

On définit une nouvelle fonction g par $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ (cette fonction est naturellement définie sur \mathbb{R}^*).

1. Quelle est la parité de la fonction g ?
2. Étudier la possibilité d'un prolongement par continuité de la fonction g en 0.
3. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x) \leq 1$.
4. Montrer que, $\forall x \neq 0, g'(x) = \frac{1}{x}(f(x) - g(x))$. En déduire les variations de la fonction g .
5. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt = 0$ et en déduire la limite de la fonction g en $+\infty$.

C. Une suite récurrente.

On considère désormais une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$ (la valeur de u_0 étant un réel quelconque).

1. Montrer que,

$$\forall x \geq 0, 0 \leq \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}.$$

2. Montrer que, si $x > 0$ alors

$$|g'(x)| \leq \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} dt$$

puis que $|g'(x)| \leq \frac{1}{4}$. Montrer que cette inégalité reste vraie si $x < 0$ (on admettra pour la suite qu'elle serait également vraie pour $x = 0$, où g est en fait dérivable).

3. Montrer que la fonction g admet un unique point fixe qu'on notera désormais α , et que $\alpha \in]0, 1[$.
4. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq |u_n - \alpha|$, puis montrer la convergence de la suite (u_n) vers α .