DS n°5.

Durée : 4 heures

L'évaluation se faisant principalement sur la qualité de la rédaction, vous soignerez la précision et la concision des arguments que vous avancerez au cours des démonstrations ainsi que la présentation de vos résultats en les encadrant ou les soulignant.
Vous n'oublierez pas de faire une marge à gauche sur chaque feuille, de bien inscrire le numéro des exercices ainsi que de numéroter vos copies avant de les rendre.

La calculatrice est interdite.

Question de cours

Soit A, B et C trois matrices, rappeler à quelle condition les produits

$$A \times (B \times C) \text{ et } (A \times B) \times C$$

sont bien définis (remarque : la condition porte sur la dimension de ces matrices, et ces dimensions ne sont pas obligatoirement identiques pour les 3).
Prouver ensuite que

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

Exercice 1 : matrices

On note dans cet exercice $A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Les trois premières questions de l'exercice sont complètement indépendantes (trois méthodes différentes pour calculer les puissances de la matrice A).

1. Calcul de A^n à l'aide de suites récurrentes.
   (a) Calculer A^2 et déterminer deux entiers a et b tels que $A^2 = aA + bI_3$.
   (b) Déduire du calcul précédent que A est inversible, et donner l'expression explicite de A^{-1}.
   (c) Démontrer l'existence pour tout entier naturel n de deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I_3$.
   (d) Calculer a_n et b_n en fonction de n, et en déduire la valeur de A^n (on ne demande pas d'écrire entièrement la matrice A^n).
2. Calcul de A^n par binôme de Newton astucieux.
   (a) En posant $J = \frac{1}{4}(A + 3I_3)$, écrire explicitement la matrice J et calculer J^2. En déduire la valeur de J^n. Pour quelles valeurs de n cette formule est-elle valable ?
   (b) À l'aide du binôme de Newton, en déduire une expression de A^n en fonction de J et de I_3.
   (c) La formule obtenue reste-t-elle vraie pour $n = -1$?
3. Calcul de A^n par diagonalisation.
   (a) Montrer que P est inversible et calculer son inverse P^{-1} (méthode au choix).
   (b) Calculer $P^{-1}AP$. On note D cette matrice dans la suite de l'exercice.
   (c) Exprimer A^n en fonction de D^n (on démontrera la formule), sans chercher à calculer explicitement A^n.
4. Calcul du commutant de la matrice A.
   (a) Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $N = P^{-1}MP$. Montrer que $MA = AM \Leftrightarrow DN = ND$, où N est la matrice définie dans la question 3 .
   (b) Déterminer toutes les matrices N commutant avec la matrice D.
   (c) En déduire que les matrices commutant avec A sont combinaisons linéaires de cinq matrices à préciser.

Exercice 2 : Urnes

On dispose pour cet exercice de deux urnes à la composition différente : l'urne U_1 contient deux boules bleues et deux boules rouges, alors que l'urne U_2 contient une seule boule bleue et trois boules rouges. On effectue des tirages dans ces urnes en respectant le protocole suivant :

- le premier tirage s'effectue dans l'urne U_1
- si on tire une boule bleue lors d'un tirage, alors le tirage suivant s'effectuera dans l'urne U_1; si au contraire on tire une boule rouge, le tirage suivant s'effectuera dans U_2
- après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne dans laquelle on vient de la tirer (autrement dit, la composition des urnes restera identique tout au long du processus)

1. On note B_n l'évènement « On a tiré une boule bleue au n-ème tirage» et b_n sa probabilité. Donner la valeur de b_1, b_2 et b_3 (on justifiera bien entendu soigneusement les calculs effectués).
2. Calculer les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{B_2}(B_3)$ et $\mathbb{P}_{B_3}(B_2)$. Les évènements B_2 et B_3 sont-ils indépendants ?
3. Quelle est la probabilité de ne tirer que des boules bleues lors des n premiers tirages ? Et celle de ne tirer que des boules rouges lors de ces n premiers tirages ? Quelle est la probabilité de ne jamais tirer deux boules de suite de la même couleur lors des $2n$ premiers tirages ?
4. On note A_n l'évènement «le n-ème tirage a été effectué dans l'urne U_1 » et u_n sa probabilité. À l'aide de la formule des probabilités totales, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
5. Calculer explicitement u_n en fonction de n, ainsi que sa limite éventuelle quand n tend vers $+\infty$.
6. En déduire la valeur de b_n lorsque $n \geqslant 1$, ainsi que sa limite quand n tend vers $+\infty$. Interpréter les résultats obtenus dans les deux dernières questions.
7. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k$. Que représente concrètement cette somme ?
8. Uniquement pour cette dernière question, on change le protocole en effectuant désormais des tirages sans remise.
   (a) En conservant les notations introduites en début d'exercice, calculer b_1, b_2 et b_3.
   (b) Quel est le nombre minimal de tirages qu'on pourra effectuer avant de devoir s'arrêter avec ce protocole ? Et le nombre maximal ?
   (c) Calculer la probabilité de l'évènement «On effectue le nombre minimal de tirages possible».

Exercice 3 : Un échiquier spécial

Une variante étrange du jeu d'échecs consiste à placer dans les cases d'un échiquier ne contenant que quatre lignes et quatre colonnes des pièces de trois types : des pions (P), des cavaliers (C) et des tours (T). Une case de l'échiquier ne peut pas contenir deux pièces simultanément (mais elle peut être vide).

P			*C*
			P
C	*P*		
			T

1. On suppose pour l'instant qu'un seul joueur joue à ce jeu, et qu'il dispose d'autant de pions, cavaliers et tours de couleur blanche qu'il le souhaite. Il n'y a a priori aucune contrainte sur la position des pièces sur l'échiquier. Les applications numériques ne sont absolument pas demandées. Par contre, les formules proposées devront être justifiées.

   (a) Combien de positions différentes peut-on créer au total ?

   (b) Combien de positions si on n'utilise que des pions, et donc ni tours, ni cavaliers ?

   (c) Combien de positions avec au moins un cavalier sur l'échiquier ?

   (d) Combien de positions avec exactement quatre pions, quatre tours, et quatre cavaliers ?

   (e) Combien de positions avec la moitié (exactement) des cases occupées par une pièce ?

   (f) Combien de positions avec exactement une pièce de chaque type sur chaque ligne de l'échiquier ?

   (g) Combien de positions avec le même nombre de pions, de tours et de cavaliers (ce nombre n'étant pas imposé) ?

2. On suppose désormais que deux joueurs ayant des pièces de couleurs différentes (l'un a des pièces blanches, l'autre des noires) posent chacun à tour de rôle une pièce sur l'échiquier. Une partie consiste en une suite de coups où un des joueurs pose une pièce sur l'échiquier (aucun déplacement ultérieur des pièces).

   (a) Combien y a-t-il de parties possibles si on considère que les joueurs ne posent que des pions (aucune tour, aucun cavalier) jusqu'à remplir entièrement l'échiquier ?

   (b) Combien y a-t-il de positions finales différentes possibles avec les mêmes hypothèses qu'à la question précédente ?

   (c) Combien y a-t-il de parties possibles si les joueurs posent une pièce de leur choix à chaque tour (pion, cavalier ou tour), en supposant toujours qu'on remplit complètement l'échiquier ?

Exercice 4 : Groupe symétrique

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Ecrire σ comme un produit de cycles à supports disjoints. En déduire la signature de σ. Déterminer σ^{-1}.

2. Quelques questions sur le groupe alterné A_6.

   (a) Rappeler la définition de A_6; puis préciser le cardinal de A_6.

   (b) On considère l'application

   $$\begin{aligned} \varphi : A_6 &\longrightarrow A_6 \\ \sigma &\longmapsto (123)\sigma \end{aligned}$$

   Justifier que l'application φ est bien définie, et qu'elle est bijective.

   (c) Est-ce que φ est un isomorphisme de groupes ? (justifier)

   (d) Dans A_6, on considère l'ensemble H suivant :

   $$H = \{\sigma \in A_6 / (123)\sigma(132) = \sigma\}$$

   Montrer que H est un sous-groupe de A_6, distinct de A_6 et de $\{\mathrm{id}_{\mathbb{N}_6}\}$.

   (e) Dans A_6, toute permutation distincte de l'identité est :

   ```
   un 3-cycle;
   ou un 5-cycle;
   ou le produit de deux 3-cycles à supports disjoints;
   ou le produit... ;
   ou le produit....
   ```

   Recopier les 2 dernières lignes en les complétant sur votre copie.

   (f) Combien existe t-il de 3 -cycles dans A_6 ?