Colle 15 : Matrices - Dénombrement - Permutations

Résultats et preuves à connaître

Proposition 1 Décomposition

Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Proposition 2

- Si M est nilpotente, alors $I_n - M \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(I_n - M)^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1} M^k$ si $M^p = O_n$.

Proposition 3

Si E et F sont deux ensembles finis alors :

- $E \times F$ est un ensemble fini et
$$\operatorname{card}(E \times F) = \operatorname{card}(E) \times \operatorname{card}(F)$$
- E^n est un ensemble fini et
$$\operatorname{card}(E^n) = \operatorname{card}(E)^n$$
- $\mathscr{F}(E,F) = F^E$ est un ensemble fini et
$$\operatorname{card}(F^E) = \operatorname{card}(F)^{\operatorname{card}(E)}$$

Proposition 4

Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs p et n. Le nombre d'injections de E dans F est l'entier
$$A_n^p = n(n-1)\cdots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!} \text{ si } 0 \leqslant p \leqslant n \quad \text{et} \quad A_n^p = 0 \text{ si } p > n$$

Proposition 5 À démontrer en explicitant une bijection entre $A \cup B$ et $[\![1, n+p]\!]$

Soient $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$ avec A et B deux ensembles finis disjoints. Alors $A \cup B$ est un ensemble fini et
$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B).$$

Proposition 6 Formulaire associé aux combinaisons : à prouver de manière combinatoire

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in [\![1,n]\!]$, on a

- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
- $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$ Formule de Pascal
- $\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$ Formule de conversion
- $\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}$,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad \text{Formule du binôme de Newton}$$

- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Proposition 7 Les cycles sont des permutations

- Toute transposition est une involution et donc une permutation.
- Tout $p-$cycle $(a_1\ a_2\ \dots\ a_p)$ est une permutation d'inverse $(a_p\ a_{p-1}\ \dots\ a_1)$.

Proposition 8 Décomposition des cycles en transposition

Pour tout $a_1, \dots, a_p$ (deux-à-deux distincts) on a

$$(a_1\ a_2\ \dots\ a_p) = (a_1\ a_2)(a_2\ a_3)\dots(a_{p-1}\ a_p).$$

Proposition 9 Cycles à supports disjoints

Deux cycles à supports disjoints commutent

À savoir faire

Toujours commencer par un exercice sur les matrices, puis s'il est réussi, un exercice sur le dénombrement

- ☐ Calculer un produit de matrices, une transposée de matrices. Déterminer si une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est inversible ou non (et connaître l'inverse dans ce cas).
- ☐ Calculer des puissances d'une matrice donnée en calculant les premières puissances puis en conjecturant une propriété qui se démontre par récurrence.
  Ou en remarquant que $M = \lambda I + A$ où les puissances de A se calculent simplement (nilpotente, ou autre raison).
- ☐ Déterminer si une matrice annulée par un polynôme est inversible ou non (et déterminer l'inverse lorsque cela est possible.)
- ☐ Savoir distinguer les situations dans lesquelles on dénombre des listes, des arrangements ou des combinaisons, et dénombrer.

Le programme officiel

Dénombrement

Cette section est introduite essentiellement en vue de son utilisation en probabilités ; rattaché aux mathématiques discrètes, le dénombrement interagit également avec l'algèbre et l'informatique.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Cardinal d'un ensemble fini	
Cardinal d'un ensemble fini.	Notations $\lvert A\rvert$, $\operatorname{card}(A)$. Tout fondement théorique des notions d'entier naturel et de cardinal est hors programme.
Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité. Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.	
Opérations sur les cardinaux : union disjointe ou quelconque, complémentaire, différence, produit cartésien. Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.	La formule du crible est hors programme.
b) Listes et combinaisons	
Nombre de p-listes (ou p-uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n, nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n.	Nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n.
Nombre de parties à p éléments (ou p-combinaisons) d'un ensemble de cardinal n.	Démonstration combinatoire des formules de Pascal et du binôme.

A - Groupe symétrique

Le groupe symétrique est introduit en vue de l'étude des déterminants, mais aussi pour son intérêt propre et ses interventions possibles dans diverses questions d'algèbre et de probabilités.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités	
Groupe des permutations de l'ensemble $\{1,\dots,n\}$.	Notation S_n.
Cycle, transposition.	Notation $(a_1\ a_2\ \dots\ a_p)$.
Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints : existence, unicité, commutativité.	La démonstration n'est pas exigible, mais les étudiants doivent savoir décomposer une permutation.