Colle 16 : Dénombrement-Permutations-Probabilités

Résultats et preuves à connaître

Proposition 1 Décomposition en cycles

Détailler la méthode itérative (on ne demande pas de prouver que cette méthode fournit bien une décomposition en cycles) et savoir l'appliquer sur un ou plusieurs exemples

Définition 1 Signature

On appelle signature d'une permutation $\sigma \in S_n$ le réel $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}$.
Une permutation est dite paire si sa signature vaut 1 et impaire si sa signature vaut -1.

- Toutes les transpositions sont de signature -1 À savoir démontrer
- $\forall (\sigma, \tau) \in S_n^2$, $\varepsilon(\sigma \circ \tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$ Résultat admis
- Si $\sigma = \prod_{i=1}^{p} \tau_i$ où tous les τ_i sont des permutations alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p$
- Tout p-cycle est de signature $(-1)^{p-1}$

Proposition 2 Groupe alterné

$\mathcal{A}_n$ est un groupe fini de cardinal $\dfrac{n!}{2}$.

Proposition 3 Opérations sur les probabilités

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathrm{P})$ un espace probabilisé fini et A et B deux événements.

1. $\mathrm{P}(\Omega) = 1$ et $\mathrm{P}(\varnothing) = 0$
2. $\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$
3. $\mathrm{P}(A \backslash B) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B)$
4. $A \subset B \Longrightarrow \mathrm{P}(A) \leqslant \mathrm{P}(B)$
5. $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$

Proposition 4 Théorème

Soit $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ et $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de réels.
Il existe une unique probabilité P sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ telle que $\forall i \in [\![1, n]\!], \mathrm{P}(\{\omega_i\}) = p_i$ si et seulement si

1. $\forall i \in [\![1, n]\!], p_i \geqslant 0$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Dans ce cas, on aura alors, pour tout événement A :

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$$

Proposition 5 Formule des probabilités totales

Soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un système complet d'événements.
Alors pour tout événement B, on a

$$\mathrm{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}(B|A_i)$$

avec la convention $\mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}(B|A_i) = 0$ si $\mathrm{P}(A_i) = 0$.

Proposition 6 Formule de Bayes généralisée

Soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles et B un événement B de probabilité non nulle. Pour tout $i_0 \in [\![1, n]\!]$,

$$\mathrm{P}(A_{i_0}|B) = \frac{\mathrm{P}(A_{i_0})\mathrm{P}(B|A_{i_0})}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}(B|A_i)}$$

Proposition 7 Propriétés

Si A et B sont deux événements indépendants pour la probabilité P alors sont également indépendants pour la probabilité P :

1. A et $\overline{B}$
2. $\overline{A}$ et B
3. $\overline{A}$ et $\overline{B}$

Proposition 8

Si des événements sont mutuellement indépendants alors ils sont deux à deux indépendants. La réciproque n'est pas vraie en générale

Proposition 9 Limites

Être capable de réécrire avec des ε (ou des A suivant la situation) toutes les définitions de $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ pour $a \in \mathbb{R}$.

À savoir faire

Pas d'exercice sur les limites cette semaine : toujours commencer par un exercice sur dénombrement ou permutations puis un second exercice au choix sur dénombrement, permutations ou probabilités.

- ☐ Savoir décomopser une permutation en cycles, puis en transpositions
- ☐ Savoir calculer la signature d'une permutation avec les deux méthodes : compter le nombre d'inversions, ou décomposer en transposition
- ☐ Savoir calculer σ^N pour N quelconque : on décompose en cycles à supports disjoints (qui commutent donc), on obtient que σ^N est le produit des cycles élevés à la puissance N, mais comme $c^p = id$ (où c est le cycle et p sa longueur) il s'agit ensuite de raisonner pour chaque cycle en terme de congruence modulo la longueur.
- ☐ Savoir distinguer les situations dans lesquelles il y a équiprobabilité.
- ☐ Savoir distinguer dans quels cas on doit utiliser la formule des probabilités totales (lorsqu'il y a une s.c.e qui donne une partition "naturelle" de l'univers), des probabilités composées (lorsqu'il y une notion d'ordre chronologique, où le résultat de la première expérience a une importance sur le déroulement de la deuxième, puis de la troisième etc.) et la formule de Bayes généralisée (calculer la probabilité d'une cause lorsque l'énoncé nous donne plutôt celle d'une conséquence)
- ☐ Pas d'exercices sur limites et continuité cette semaine

Ce qu'en dit le programme

A - Probabilités sur un univers fini, variables aléatoires et lois

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Univers, événements, variables aléatoires	
Lien entre vocabulaire ensembliste et vocabulaire des probabilités. Une variable aléatoire X est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E.	On se limite au cas d'un univers fini. Événement élémentaire (singleton), système complet d'événements, événements disjoints (ou incompatibles). Notations $\{X \in A\}$ et $(X \in A)$.
b) Espaces probabilisés finis	
Probabilité sur un univers fini. Une distribution de probabilités sur un ensemble E est une famille d'éléments de $\mathbb{R}^+$ indexée par E et de somme 1. Une distribution de probabilités sur un ensemble fini est une famille de réels positifs indexée par cet ensemble et de somme 1. Probabilité uniforme.	Espace probabilisé fini (Ω, P). Notations $P(X \in A)$, $P(X = x)$ et $P(X \leqslant x)$. Une probabilité P sur Ω est déterminée par la distribution de probabilités $(P(\{\omega\}))_{\omega\in\Omega}$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire. Croissance.	La formule du crible est hors programme.

c) Probabilités conditionnelles

Si $P(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par la relation $P(A\|B) = P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.	
L'application P_B est une probabilité.	
Formules des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes.	Par convention, $P(A\|B)P(B) = 0$ lorsque $P(B) = 0$.

d) Loi d'une variable aléatoire

Pas encore abordé

e) Événements indépendants

Les événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.	Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B s'écrit $P(A\|B) = P(A)$.
Famille finie d'événements indépendants.	L'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance.
Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi.	Extension au cas de n événements.