Correction du DM n°4.

Exercice

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1 , on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4.$$

1. (a) On a : $f_n(0) = -4$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$ f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$et $f_n'(x) = nx^{n-1} + 9x = x\left(nx^{n-1} + 9\right) > 0$. f_n est donc bijective de $\mathbb{R}_+$dans $[-4, +\infty[$. Comme $0 \in [-4, +\infty[$, l'équation $f_n(x) = 0$ a donc une unique solution dans $\mathbb{R}_+$. On a donc $u_n \geqslant 0$ et $f_n(u_n) = 0$.

   (b) Pour calculer u_1 et u_2, il faut résoudre $f_1(x) = 0$ et $f_2(x) = 0$: $f_1(x) = x + 9x^2 - 4$ polynôme du second dégré de déterminant : $\Delta = 1 + 4.4.9 = 145$ donc $u_1 = \frac{-1+\sqrt{145}}{18}$. .qui est la racine positive de cette équation. $f_2(x) = x^2 + 9x^2 - 4 = 10x^2 - 4 = 10(x - \sqrt{2/5})(x + \sqrt{2/5})$ donc $u_2 = \sqrt{2/5}$.

   (c) On a $f_n(2/3) = (2/3)^n + 9(2/3)^2 - 4 = (2/3)^n > 0$ et $f_n(0) = -4$
   Donc $f_n(0) < f_n(u_n) < f_n(2/3)$ et comme f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$et qu'ils en sont éléments, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{2}{3}$. et donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in]0, \frac{2}{3}[$.

2. (a) Soit $x \in]0, 1[$, on a : $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} - x^n = x^n(x-1)$ et comme $x < 1$ et $x^n > 0$ on a bien $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.

   (b) Donc, comme $u_n \in]0, \frac{2}{3}[$, ona $u_n \in]0, 1[$ et $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0 < f_n(u_{n+1})$.
   Donc $f_n(u_{n+1}) > 0 = f_n(u_n)$ et comme f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et que u_n et u_{n+1} en sont éléments, on a alors $u_{n+1} > u_n$ pour tout entier n et la suite u est croissante.

   (c) u est croissante et majorée par $\frac{2}{3}$ donc elle est convergente vers ℓ avec $0 \leqslant \ell \leqslant \frac{2}{3}$.

3. (a) Comme $0 \leqslant u_n \leqslant 2/3$ et que la fonction puissance n est strictement coirssante pour $n > 0$ sur $\mathbb{R}^+$(sur $\mathbb{R}^-$celà dépendrait de la parité de n) alors $0^n \leqslant (u_n)^n \leqslant (2/3)^n$ et comme $|2/3| < 1$ on a $(2/3)^n \to 0$ donc par encadrement $u_n \to 0$

   (b) Or ${u_n}^n + 9{u_n}^2 - 4 = 0$ alors par passage à la limite,
   Donc $9\ell^2 - 4 = 0$ et $\ell = \frac{2}{3}$ car $\ell \geqslant 0$. Conclusion : $u_n \underset{n \to +\infty}{\to} \ell = \dfrac{2}{3}$

Problème : une famille de matrices

1. On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = I_3$. On a donc pour tout entier n, $A^{3n} = (A^3)^n = I_3$ et ainsi $A^k = \begin{cases} I_3 \text{ si } k \equiv 0[3] \\ A \text{ si } k \equiv 1[3] A^2 \text{ si } k \equiv 2[3] \end{cases}$ Comme $A^3 = A^2 \times A = A \times A^2 = I_3$, on a montré que A^2 était l'inverse de A, i.e. A est inversible et $A^{-1} = A^2$

2. On a $E = \left\{M(a,b,c), (a,b,c) \in \mathbb{C}^3\right\} = \left\{aI_3 + bA + cA^2, (a,b,c) \in \mathbb{C}^3\right\}$. Montrons que c'est un sous-anneau commutatif de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
   - $E \subseteq \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$
   - En prenant $a = 1$ et $b = c = 0$ on remarque que $I_3 = M(1,0,0) \in E$
   - Soient A et B deux matrices de E, alors il existe $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ et $(a',b',c') \in \mathbb{C}^3$ tel que $A = aI_3 + bA + cA^2$ et $B = a'I_3 + b'A + c'^2$. Ainsi $A + B = (a+a')I_3 + (b+b')A + (c+c')A^2 = M(a+a', b+b', c+c') \in E$
     $A \times B = aa'I_3 + ab'A + ac'A^2 + ba'A + bb'A^2 + bc'A^3 + ca'A^2 + cb'A^3 + cc'A^4$ or $A^3 = I_3$ et $A^4 = A^2$ donc $A \times B = (aa'+bc'+cb')I_3 + (ab'+a'b+cc')A + (ac'+bb'+ca')A^2 = M(aa'+bc'+cb', ab'+a'b+cc', ac'+bb'+ca') \in E$
   - De plus on s'aperçoit que $B \times A = ac' + bb' + ca' = M(a'a + b'c + c'b, a'b + ab' + c'c, a'c + b'b + c'a) = A \times B$ donc E est bien un sous anneau commutatif de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Note du rédacteur en chef pour ce qui est de la dimension et d'une base, il vous était pour l'instant impossible de répondre à la question, mais (I, A, A^2) en était une famille libre et génératrice (donc une base) formée de 3 matrices : la dimension de E vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel était donc 3

3. (a) $(A - \lambda I)\left(A^2 + \lambda A + \lambda^2 I\right) = A^3 + \lambda A^2 + \lambda^2 A - \lambda A^2 - \lambda^2 A - \lambda^3 I = A^3 - \lambda^3 I = (1 - \lambda^3)I$.

   (b) En supposant que $\lambda \in \mathbb{U}_3$ on a $\lambda^3 = 1$ si bien que le calcul précédent nous donne
   $$(A - \lambda I)\left(A^2 + \lambda A + \lambda^2 I\right) = O_3$$
   or $A^2 + \lambda A + \lambda^2 I \neq O_3$ puisqu'il s'agit de la matrice $M(\lambda^2, \lambda, 1)$ (3 de ses coefficients valent 1 donc il ne peut pas s'agir de la matrice nulle). Ainsi, on a $A - \lambda I$ qui est un diviseur de O_3, si elle était inversible, en multipliant par son inverse l'égalité $(A - \lambda I)\left(A^2 + \lambda A + \lambda^2 I\right) = O_3$ on obtiendrait $M(\lambda^2, \lambda, 1) = O_3$ ce qui est absurde : on peut donc en conclure que $A - \lambda I$ n'est pas inversible lorsque $\lambda \in \mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$

   (c) Lorsque $\lambda \notin \mathbb{U}_3$ on a $\lambda^3 \neq 1$ et donc
   $$(A - \lambda I)\left(A^2 + \lambda A + \lambda^2 I\right) = (1 - \lambda^3)I$$
   avec $1 - \lambda^3 \neq 0$ ainsi
   $$(A - \lambda I) \times \frac{1}{1 - \lambda^3}\left(A^2 + \lambda A + \lambda^2 I\right) = I$$
   et le produit effectué dans l'autre sens donne le même résultat car les deux matrices commutent (ce sont toutes les deux des éléments de E, un autre argument plus général était possible : toutes les deux des polynômes en A) donc $A - \lambda I$ est inversible et son inverse vaut donc
   $$A^{-1} = \frac{1}{1 - \lambda^3}\left(A^2 + \lambda A + \lambda^2 I\right)$$

4. (a) Soit $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, résolvons en l'inconnu $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ le système $PX = Y$:
   $$PX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = a \\ -x - j^2 y - jz = b \\ x + jy + j^2 z = c \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow -L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + y + z = a \\ x + j^2 y + jz = -b \\ x + jy + j^2 z = c \end{cases}$$

on ne suit pas exactement la méthode du pivot de Gauss ici car on remarque la particularité suivante : chaque inconnue apparaît en facteur d'un 1, d'un j ou d'un j^2. Comme $1+j+j^2=0$ en sommant les trois lignes on trouve $3x=a-b+c$. En faisant $L_1+jL_2+j^2L_3$ on trouve $3y=a-jb+j^2c$ et enfin en faisant $L_1+j^2L_2+jL_3$ on trouve $3z=a-j^2b+jc$. Finalement, on a

$$PX=Y \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{a-b+c}{3} \\ y=\frac{a-jb+j^2c}{3} \\ z=\frac{a-j^2b+jc}{3} \end{cases} \Leftrightarrow X=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -j & j^2 \\ 1 & -j^2 & j \end{pmatrix} Y$$

On a donc prouvé que P est inversible et son inverse vaut

$$P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -j & j^2 \\ 1 & -j^2 & j \end{pmatrix}$$

(b) Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ alors

- $\phi(A+B)=P^{-1}(A+B)P=P^{-1}AP+P^{-1}BP=\phi(A)+\phi(B)$
- $\phi(A\times B)=P^{-1}ABP=P^{-1}APP^{-1}BP=\phi(A)\times\phi(B)$
- $\phi(I)=P^{-1}IP=I$

donc ϕ est un morphisme de l'anneau $(\mathcal{M}_3(\mathbb{C}),+,\times)$
Montrons que ϕ est bijectif : soit $M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ alors $\phi(B)=M \Leftrightarrow P^{-1}BP=M \Leftrightarrow BP=PM$ en multipliant à gauche par P puis équivaut à $\phi(B)=M \Leftrightarrow B=PMP^{-1}$ en multipliant à droite par P^{-1}. Ainsi, M admet un unique antécédent par ϕ ce qui prouve que ϕ est bijectif, et $\phi^{-1}(M)=B=PMP^{-1}$

(c) Plutôt que de vérifier que $\phi(A)=\Delta$ i.e. que $P^{-1}AP=\Delta$ on va plutôt vérifier que $AP=P\Delta$ car ceci est équivalent (et ne nécessite pas de calculer l'inverse de P) On calcule les deux produits, et l'on trouve dans les deux cas $\begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$ ce qui prouve bien que $AP=P\Delta$ et ainsi $P^{-1}AP=\Delta$ i.e. $\phi(A)=\Delta$ ce qu'il fallait prouver.
Comme ϕ est un morphisme d'anneau, on a $\Phi(A^2)=\Phi(A)^2=\Delta^2=\operatorname{diag}(1,j^2,j)$

(d) On a $\phi(M(a,b,c))=\phi(aI+bA+cA^2)\phi(aI)+\phi(bA)+\phi(cA^2)$ puisque ϕ est un morphisme, et ainsi $\phi(M(a,b,c))=aI+b\phi(A)+c\phi(A^2)=aI+b\Delta+c\Delta^2=\operatorname{diag}(a+b+c,a+jb+j^2c,a+j^2b+jc)$

(e) Montrons que $\psi:\begin{cases} E\to\mathcal{D} \\ A\mapsto\phi(A)\end{cases}$ est un isomorphisme d'anneau. Premièrement, ceci est bien défini car comme il l'a été prouvé à la question précédente, dès que $A\in E$ son image par ϕ est bien une matrice diagonale. De plus, c'est un morphisme en tant que restriction d'un morphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
Montrons que ce morphisme est injectif en déterminant son noyau $A\in ker(\psi)\Leftrightarrow(A\in E$ et $\phi(A)=O_3)\Leftrightarrow A=O_3$ car ϕ est injectif, ainsi $\ker(\psi)=\{O_3\}$ ce qui prouve que ψ est injectif.
Prouvons à présent sa surjectivité. Soit $D\in\mathcal{D}$, alors $\exists(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{C}^3$ tel que $D=\operatorname{diag}(\alpha,\beta,\gamma)$, et on cherche alors si D admet un antécédent par ψ dans E.
Pour cela, on résout en l'inconnu $(x,y,z)\in\mathbb{C}^3$ l'équation

$$\psi(M(a,b,c))=D \Leftrightarrow \begin{cases} f(x,y,z)=\alpha \\ g(x,y,z)=\beta \\ h(x,y,z)=\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & +y & +z=\alpha \\ x & +jy & +j^2z & =\beta \\ x & +j^2y & +jz & =\gamma \end{cases}$$

comme on l'a vu à la question 4a, ce système admet une unique solution $\begin{cases} a=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} \\ b=\frac{\alpha+j^2\beta+j\gamma}{3} \\ c=\frac{\alpha+j\beta+j^2\gamma}{3} \end{cases}$ ce qui signifie que D admet un antécédent (unique d'ailleurs) et donc ψ est surjective : c'est donc un isomorphisme de l'anneau

$(E,+,\times)$ vers $(\mathcal{D},+,\times)$
Remarque oups, il semblerait encore que le rédacteur ait laissé le mot "sous-algèbre", il s'agit d'un anneau auquel on peut rajouter une loi externe (la multiplication des matrices par des scalaires en l'occurence) mais on pouvait répondre à cette question en en remplaçant par "anneau".

(f) Soit $M \in E$ alors si M est inversible, on a $MM^{-1} = I$ et en appliquant ψ on trouve $\psi(M)\psi(M^{-1}) = \psi(I) = I$ (idem pour le produit dans l'autre sens) et donc $\psi(M)$ est inversible. Réciproquement, si $\psi(M)$ est inversible, le même argument (en appliquant cette fois-ci ψ^{-1}) permet de prouver que M est inversible) on a donc

M est inversible $\Leftrightarrow \psi(M)$ est inversible $\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c \neq 0 \\ a+jb+j^2c \neq 0 \\ a+j^2b+jc \neq 0 \end{cases}$

Lorsque cela est vérifié, alors $\psi(M)^{-1} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{a+b+c}, \frac{1}{a+jb+j^2c}, \frac{1}{a+j^2b+jc}\right) \in \mathcal{D}$ et on a $\psi(M)^{-1} = \psi(M^{-1})$ donc $M^{-1} = \psi^{-1}\left(\operatorname{diag}\left(\frac{1}{a+b+c}, \frac{1}{a+jb+j^2c}, \frac{1}{a+j^2b+jc}\right)\right) \in E$

5. (a) On effectue les calcul s

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ jd & je & jf \\ j^2g & j^2h & j^2i \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & jb & j^2c \\ d & je & j^2f \\ g & jh & j^2i \end{pmatrix}$

ces deux matrices commutent donc si et seulement si

$\begin{cases} a = a \\ b = jb \\ c = j^2c \\ jd = d \\ je = je \\ jf = j^2f \\ j^2g = g \\ j^2h = jh \\ j^2i = j^2i \end{cases}$ donc si et seulement si la $b = c = d = f = g = h = 0$ i.e. si et seulement si la matrice est diagonale.

(b) Notons $Comm(A)$ l'ensemble des matrices qui commutent avec A. Comme toutes les matrices de E sont des polynômes en A et commutent donc avec A on a $E \subseteq Comm(A)$, il reste à prouver l'autre inclusion.
Soit B une matrice qui commute avec A i.e. $AB = BA$, alors en appliquant ϕ on trouve $\phi(A)\phi(B) = \phi(B)\phi(A)$ autrement dit $\phi(B)$ commute avec $\phi(A)$ qui vaut en fait Δ. D'après la question 5a), cela entraîne que $\phi(B)$ est diagonale, notons $D = \phi(B)$, comme ϕ est bijective on en déduit que $B = \phi^{-1}(D) = \psi^{-1}(D)$ cette matrice appartient à E. Ainsi $comm(A) \subseteq E$
Conclusion

$$comm(A) = E$$

6. (a) Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ tel que $M = M(a,b,c)$. Cherchons pour quels $(x,y,z) \in \mathbb{C}^3$ on a $M(x,y,z)^2 = M = M(a,b,c)$:
En appliquant ψ on a $M(x,y,z)^2 = M(a,b,c) \Leftrightarrow \phi(M(x,y,z)^2) = \phi(M(a,b,c)) \Leftrightarrow \phi(M(x,y,z))^2 = \phi(M(a,b,c))$ comme il s'agit de matrice diagonale cela équivaut donc à

$\begin{cases} f(x,y,z)^2 = f(a,b,c) \\ g(x,y,z)^2 = g(a,b,c) \\ h(x,y,z)^2 = h(a,b,c) \end{cases}$ Notons α, β et γ des racines carrées complexes de $f(a,b,c)$ $g(a,b,c)$ et $h(a,b,c)$:

il en existe et elles sont non nulles car on a supposé que M était inversible donc les 3 valeurs du membre de droite sont non nulles. Ainsi $\begin{cases} f(x,y,z)^2 = f(a,b,c) \\ g(x,y,z)^2 = g(a,b,c) \\ h(x,y,z)^2 = h(a,b,c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x,y,z) = \pm\alpha \\ g(x,y,z) = \pm\beta \\ h(x,y,z) = \pm\gamma \end{cases}$ On a donc $X^2 = M \Leftrightarrow \phi(X) = \operatorname{diag}(\pm\alpha, \pm\beta, \pm\gamma) \Leftrightarrow X = P \operatorname{diag}(\pm\alpha, \pm\beta, \pm\gamma) P^{-1}$ Il y a $2 \times 2 \times 2$ matrices (elles sont bien toutes deux à deux distinctes par injectivité de ϕ^{-1})

(b) Comme $A \in E$ et est inversible, il y a déjà 8 matrices de E telles que $X^2 = A$, mais il faut montrer qu'il n'y en a pas d'autres.
Cela revient à prouver que $X^2 = A \Rightarrow X \in E$, ce que nous allons faire.
Soit X une matrice telle que $X^2 = A$ alors $XA = XX^2 = X^2X$ vu que X commute avec ses puissances, or $X^2X = AX$ donc finalement $XA = AX$ i.e. X commute avec A. D'après la question 5b) on en déduit que $X \in E$.
Conclusion, les seules matrices X qui vérifient $X^2 = A$ sont les 8 solutions appartenant à E (fournies par la question 6a))
Si l'on souhaite les exprimer : on a $A = M(0,1,0)$ est inversible et donc pour toute matrice $X = M(x,y,z) \in E$ on a $X^2 = A \Leftrightarrow \begin{cases} f(x,y,z)^2 = 1 \\ g(x,y,z)^2 = j \\ h(x,y,z)^2 = j^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x,y,z) = \pm 1 \\ g(x,y,z) = \pm e^{\frac{i\pi}{3}} \\ h(x,y,z) = \pm e^{\frac{2i\pi}{3}} \end{cases} \Leftrightarrow X = P\,\mathrm{diag}\,(1, \pm e^{\frac{i\pi}{3}}, \pm e^{\frac{2i\pi}{3}})P^{-1}$