

Correction du DM n°4.

Exercice

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4.$$

1. (a) On a : $f_n(0) = -4$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$ f_n est dérivable sur \mathbb{R}_+ et $f'_n(x) = nx^{n-1} + 9x = x(nx^{n-1} + 9) > 0$. f_n est donc bijective de \mathbb{R}_+ dans $[-4, +\infty[$. Comme $0 \in [-4, +\infty[$, l'équation $f_n(x) = 0$ a donc une unique solution dans \mathbb{R}_+ . On a donc $u_n \geq 0$ et $f_n(u_n) = 0$.
 - (b) Pour calculer u_1 et u_2 , il faut résoudre $f_1(x) = 0$ et $f_2(x) = 0$: $f_1(x) = x + 9x^2 - 4$ polynôme du second degré de déterminant : $\Delta = 1 + 4 \cdot 4 \cdot 9 = 145$ donc $u_1 = \frac{-1 + \sqrt{145}}{18}$. qui est la racine positive de cette équation. $f_2(x) = x^2 + 9x^2 - 4 = 10x^2 - 4 = 10(x - \sqrt{2/5})(x + \sqrt{2/5})$ donc $u_2 = \sqrt{2/5}$.
 - (c) On a $f_n(2/3) = (2/3)^n + 9(2/3)^2 - 4 = (2/3)^n > 0$ et $f_n(0) = -4$
Donc $f_n(0) < f_n(u_n) < f_n(2/3)$ et comme f_n est strictement croissante sur \mathbb{R}^+ et qu'ils en sont éléments, on a $0 \leq u_n \leq \frac{2}{3}$. et donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in]0, \frac{2}{3}[$.
2. (a) Soit $x \in]0, 1[$, on a : $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} - x^n = x^n(x - 1)$ et comme $x < 1$ et $x^n > 0$ on a bien $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
 - (b) Donc, comme $u_n \in]0, \frac{2}{3}[$, on a $u_n \in]0, 1[$ et $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0 < f_n(u_{n+1})$.
Donc $f_n(u_{n+1}) > 0 = f_n(u_n)$ et comme f_n est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ et que u_n et u_{n+1} en sont éléments, on a alors $u_{n+1} > u_n$ pour tout entier n et la suite u est croissante.
 - (c) u est croissante et majorée par $\frac{2}{3}$ donc elle est convergente vers ℓ avec $0 \leq \ell \leq \frac{2}{3}$.
3. (a) Comme $0 \leq u_n \leq 2/3$ et que la fonction puissance n est strictement décroissante pour $n > 0$ sur \mathbb{R}^+ (sur \mathbb{R}^- cela dépendrait de la parité de n) alors $0^n \leq (u_n)^n \leq (2/3)^n$ et comme $|2/3| < 1$ on a $(2/3)^n \rightarrow 0$ donc par encadrement $u_n \rightarrow 0$
 - (b) Or $u_n^n + 9u_n^2 - 4 = 0$ alors par passage à la limite,
Donc $9\ell^2 - 4 = 0$ et $\ell = \frac{2}{3}$ car $\ell \geq 0$. Conclusion : $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell = \frac{2}{3}$

Problème : une famille de matrices

1. On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = I_3$. On a donc pour tout entier n , $A^{3n} = (A^3)^n = I_3$ et ainsi $A^k =$

$\begin{cases} I_3 & \text{si } k \equiv 0[3] \\ A & \text{si } k \equiv 1[3] \\ A^2 & \text{si } k \equiv 2[3] \end{cases}$ Comme $A^3 = A^2 \times A = A \times A^2 = I_3$, on a montré que A^2 était l'inverse de A , i.e. A est inversible et $A^{-1} = A^2$

2. On a $E = \{M(a, b, c), (a, b, c) \in \mathbb{C}^3\} = \{aI_3 + bA + cA^2, (a, b, c) \in \mathbb{C}^3\}$. Montrons que c'est un sous-anneau commutatif de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

- $E \subseteq \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$
- En prenant $a = 1$ et $b = c = 0$ on remarque que $I_3 = M(1, 0, 0) \in E$
- Soient C et B deux matrices de E , alors il existe $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $(a', b', c') \in \mathbb{C}^3$ tel que $C = aI_3 + bA + cA^2$ et $B = a'I_3 + b'A + c'A^2$. Ainsi $C - B = (a - a')I_3 + (b - b')A + (c - c')A^2 = M(a - a', b - b', c - c') \in E$
 $C \times B = aa'I_3 + ab'A + ac'A^2 + ba'A + bb'A^2 + bc'A^3 + ca'A^2 + cb'A^3 + cc'A^4$ or $A^3 = I_3$ et $A^4 = A^2$ donc $C \times B = (aa' + bc' + cb')I_3 + (ab' + a'b + cc')A + (ac' + bb' + ca')A^2 = M(aa' + bc' + cb', ab' + a'b + cc', ac' + bb' + ca') \in E$
- De plus on s'aperçoit que $B \times C = ac' + bb' + ca' = M(a'a + b'c + c'b, a'b + ab' + c'c, a'c + b'b + c'a) = C \times B$ donc E est bien un sous anneau commutatif de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Note du rédacteur en chef pour ce qui est de la dimension et d'une base, il vous était pour l'instant impossible de répondre à la question, mais (I, A, A^2) en était une famille libre et génératrice (donc une base) formée de 3 matrices : la dimension de E vu comme un \mathbb{C} -espace vectoriel était donc 3

3. (a) $(A - \lambda I)(A^2 + \lambda A + \lambda^2 I) = A^3 + \lambda A^2 + \lambda^2 A - \lambda A^2 - \lambda^2 A - \lambda^3 I = A^3 - \lambda^3 I = (1 - \lambda^3)I$.

(b) En supposant que $\lambda \in \mathbb{U}_3$ on a $\lambda^3 = 1$ si bien que le calcul précédent nous donne

$$(A - \lambda I)(A^2 + \lambda A + \lambda^2 I) = O_3$$

or $A^2 + \lambda A + \lambda^2 I \neq O_3$ puisqu'il s'agit de la matrice $M(\lambda^2, \lambda, 1)$ (3 de ses coefficients valent 1 donc il ne peut pas s'agir de la matrice nulle). Ainsi, on a $A - \lambda I$ qui est un diviseur de O_3 , si elle était inversible, en multipliant par son inverse l'égalité $(A - \lambda I)(A^2 + \lambda A + \lambda^2 I) = O_3$ on obtiendrait $M(\lambda^2, \lambda, 1) = O_3$ ce qui est absurde : on peut donc en conclure que $A - \lambda I$ n'est pas inversible lorsque $\lambda \in \mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$

(c) Lorsque $\lambda \notin \mathbb{U}_3$ on a $\lambda^3 \neq 1$ et donc

$$(A - \lambda I)(A^2 + \lambda A + \lambda^2 I) = (1 - \lambda^3)I$$

avec $1 - \lambda^3 \neq 0$ ainsi

$$(A - \lambda I) \times \frac{1}{1 - \lambda^3} (A^2 + \lambda A + \lambda^2 I) = I$$

et le produit effectué dans l'autre sens donne le même résultat car les deux matrices commutent (ce sont toutes les deux des éléments de E , un autre argument plus général était possible : toutes les deux des polynômes en A) donc $A - \lambda I$ est inversible et son inverse vaut donc

$$A^{-1} = \frac{1}{1 - \lambda^3} (A^2 + \lambda A + \lambda^2 I)$$

4. (a) Soit $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, résolvons en l'inconnu $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ le système $PX = Y$:

$$PX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = a \\ -x - j^2 y - jz = b \\ x + jy + j^2 z = c \end{cases} \Leftrightarrow_{L_2 \leftarrow -L_2} \begin{cases} x + y + z = a \\ x + j^2 y + jz = -b \\ x + jy + j^2 z = c \end{cases}$$

on ne suit pas exactement la méthode du pivot de Gauss ici car on remarque la particularité suivante : chaque inconnue apparaît en facteur d'un 1, d'un j ou d'un j^2 . Comme $1 + j + j^2 = 0$ en sommant les trois lignes on trouve $3x = a - b + c$. En faisant $L_1 + jL_2 + j^2L_3$ on trouve $3y = a - jb + j^2c$ et enfin en faisant $L_1 + j^2L_2 + jL_3$ on trouve $3z = a - j^2b + jc$. Finalement, on a

$$PX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a-b+c}{3} \\ y = \frac{a-jb+j^2c}{3} \\ z = \frac{a-j^2b+jc}{3} \end{cases} \Leftrightarrow X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -j & j^2 \\ 1 & -j^2 & j \end{pmatrix} Y$$

On a donc prouvé que P est inversible et son inverse vaut

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -j & j^2 \\ 1 & -j^2 & j \end{pmatrix}$$

(b) Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ alors

- $\phi(A + B) = P^{-1}(A + B)P = P^{-1}AP + P^{-1}BP = \phi(A) + \phi(B)$
- $\phi(A \times B) = P^{-1}ABP = P^{-1}APP^{-1}BP = \phi(A) \times \phi(B)$
- $\phi(I) = P^{-1}IP = I$

donc ϕ est un morphisme de l'anneau $(\mathcal{M}_3(\mathbb{C}), +, \times)$

Montrons que ϕ est bijectif : soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ alors $\phi(B) = M \Leftrightarrow P^{-1}BP = M \Leftrightarrow BP = PM$ en multipliant à gauche par P puis équivaut à $\phi(B) = M \Leftrightarrow B = PMP^{-1}$ en multipliant à droite par P^{-1} . Ainsi, M admet un unique antécédent par ϕ ce qui prouve que ϕ est bijectif, et $\phi^{-1}(M) = B = PMP^{-1}$

(c) Plutôt que de vérifier que $\phi(A) = \Delta$ i.e. que $P^{-1}AP = \Delta$ on va plutôt vérifier que $AP = P\Delta$ car ceci est équivalent (et ne nécessite pas de calculer l'inverse de P) On calcule les deux produits, et l'on trouve dans les deux cas

$$\begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix} \text{ ce qui prouve bien que } AP = P\Delta \text{ et ainsi } P^{-1}AP = \Delta \text{ i.e. } \phi(A) = \Delta \text{ ce qu'il fallait prouver.}$$

Comme ϕ est un morphisme d'anneau, on a $\phi(A^2) = \phi(A)^2 = \Delta^2 = \text{diag}(1, j^2, j)$

(d) On a $\phi(M(a, b, c)) = \phi(aI + bA + cA^2) = \phi(aI) + \phi(bA) + \phi(cA^2)$ puisque ϕ est un morphisme, et ainsi $\phi(M(a, b, c)) = aI + b\phi(A) + c\phi(A^2) = aI + b\Delta + c\Delta^2 = \text{diag}(a + b + c, a + jb + j^2c, a + j^2b + jc)$

(e) Montrons que $\psi : \begin{cases} E \rightarrow \mathcal{D} \\ A \mapsto \phi(A) \end{cases}$ est un isomorphisme d'anneau. Premièrement, ceci est bien défini car comme il

l'a été prouvé à la question précédente, dès que $A \in E$ son image par ϕ est bien une matrice diagonale. De plus, c'est un morphisme en tant que restriction d'un morphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Montrons que ce morphisme est injectif en déterminant son noyau $A \in \ker(\psi) \Leftrightarrow (A \in E \text{ et } \phi(A) = O_3) \Leftrightarrow A = O_3$ car ϕ est injectif, ainsi $\ker(\psi) = \{O_3\}$ ce qui prouve que ψ est injectif.

Prouvons à présent sa surjectivité. Soit $D \in \mathcal{D}$, alors $\exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que $D = \text{diag}(\alpha, \beta, \gamma)$, et on cherche alors si D admet un antécédent par ψ dans E .

Pour cela, on résout en l'inconnu $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ l'équation

$$\psi(M(a, b, c)) = D \Leftrightarrow \begin{cases} f(x, y, z) = \alpha \\ g(x, y, z) = \beta \\ h(x, y, z) = \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = \alpha \\ x + jy + j^2z = \beta \\ x + j^2y + jz = \gamma \end{cases}$$

comme on l'a vu à la question 4a, ce système admet une unique solution $\begin{cases} a = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} \\ b = \frac{\alpha + j^2\beta + j\gamma}{3} \\ c = \frac{\alpha + j\beta + j^2\gamma}{3} \end{cases}$ ce qui signifie que

D admet un antécédent (unique d'ailleurs) et donc ψ est surjective : c'est donc un isomorphisme de l'anneau

$(E, +, \times)$ vers $(\mathcal{D}, +, \times)$

Remarque oups, il semblerait encore que le rédacteur ait laissé le mot "sous-algèbre", il s'agit d'un anneau auquel on peut rajouter une loi externe (la multiplication des matrices par des scalaires en l'occurrence) mais on pouvait répondre à cette question en en remplaçant par "anneau".

- (f) Soit $M \in E$ alors si M est inversible, on a $MM^{-1} = I$ et en appliquant ψ on trouve $\psi(M)\psi(M^{-1}) = \psi(I) = I$ (idem pour le produit dans l'autre sens) et donc $\psi(M)$ est inversible. Réciproquement, si $\psi(M)$ est inversible, le même argument (en appliquant cette fois-ci ψ^{-1}) permet de prouver que M est inversible) on a donc

$$M \text{ est inversible} \Leftrightarrow \psi(M) \text{ est inversible} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c \neq 0 \\ a + jb + j^2c \neq 0 \\ a + j^2b + jc \neq 0 \end{cases}$$

Lorsque cela est vérifié, alors $\psi(M)^{-1} = \text{diag}(\frac{1}{a+b+c}, \frac{1}{a+jb+j^2c}, \frac{1}{a+j^2b+jc}) \in \mathcal{D}$ et on a $\psi(M)^{-1} = \psi(M^{-1})$ donc $M^{-1} = \psi^{-1}(\text{diag}(\frac{1}{a+b+c}, \frac{1}{a+jb+j^2c}, \frac{1}{a+j^2b+jc})) \in E$

5. (a) On effectue les calculs

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ jd & je & jf \\ j^2g & j^2h & j^2i \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & jb & j^2c \\ d & je & j^2f \\ g & jh & j^2i \end{pmatrix}$$

ces deux matrices commutent donc si et seulement si

$$\begin{cases} a = a \\ b = jb \\ c = j^2c \\ jd = d \\ je = je \\ jf = j^2f \\ j^2g = g \\ j^2h = jh \\ j^2i = j^2i \end{cases} \text{ donc si et seulement si la } b = c = d = f = g = h = 0 \text{ i.e. si et seulement si la matrice est diagonale.}$$

- (b) Notons $Comm(A)$ l'ensemble des matrices qui commutent avec A . Comme toutes les matrices de E sont des polynômes en A et commutent donc avec A on a $E \subseteq Comm(A)$, il reste à prouver l'autre inclusion.

Soit B une matrice qui commute avec A i.e. $AB = BA$, alors en appliquant ϕ on trouve $\phi(A)\phi(B) = \phi(B)\phi(A)$ autrement dit $\phi(B)$ commute avec $\phi(A)$ qui vaut en fait Δ . D'après la question 5a), cela entraîne que $\phi(B)$ est diagonale, notons $D = \phi(B)$, comme ϕ est bijective on en déduit que $B = \phi^{-1}(D) = \psi^{-1}(D)$ cette matrice appartient à E . Ainsi $comm(A) \subseteq E$

Conclusion

$$comm(A) = E$$

6. (a) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que $M = M(a, b, c)$. Cherchons pour quels $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ on a $M(x, y, z)^2 = M = M(a, b, c)$: En appliquant ψ on a $M(x, y, z)^2 = M(a, b, c) \Leftrightarrow \phi(M(x, y, z)^2) = \phi(M(a, b, c)) \Leftrightarrow \phi(M(x, y, z))^2 = \phi(M(a, b, c))$ comme il s'agit de matrice diagonale cela équivaut donc à

$$\begin{cases} f(x, y, z)^2 = f(a, b, c) \\ g(x, y, z)^2 = g(a, b, c) \\ h(x, y, z)^2 = h(a, b, c) \end{cases} \text{ Notons } \alpha, \beta \text{ et } \gamma \text{ des racines carrées complexes de } f(a, b, c) \text{ } g(a, b, c) \text{ et } h(a, b, c) :$$

il en existe et elles sont non nulles car on a supposé que M était inversible donc les 3 valeurs du membre de

droite sont non nulles. Ainsi $\begin{cases} f(x, y, z)^2 = f(a, b, c) \\ g(x, y, z)^2 = g(a, b, c) \\ h(x, y, z)^2 = h(a, b, c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x, y, z) = \pm\alpha \\ g(x, y, z) = \pm\beta \\ h(x, y, z) = \pm\gamma \end{cases}$ On a donc $X^2 = M \Leftrightarrow \phi(X) =$

$\text{diag}(\pm\alpha, \pm\beta, \pm\gamma) \Leftrightarrow X = P \text{diag}(\pm\alpha, \pm\beta, \pm\gamma) P^{-1}$ Il y a $2 \times 2 \times 2$ matrices (elles sont bien toutes deux à deux distinctes par injectivité de ϕ^{-1})

- (b) Comme $A \in E$ et est inversible, il y a déjà 8 matrices de E telles que $X^2 = A$, mais il faut montrer qu'il n'y en a pas d'autres.

Cela revient à prouver que $X^2 = A \Rightarrow X \in E$, ce que nous allons faire.

Soit X une matrice telle que $X^2 = A$ alors $XA = XX^2 = X^2X$ vu que X commute avec ses puissances, or $X^2X = AX$ donc finalement $XA = AX$ i.e. X commute avec A . D'après la question 5b) on en déduit que $X \in E$.

Conclusion, les seules matrices X qui vérifient $X^2 = A$ sont les 8 solutions appartenant à E (fournies par la question 6a))

Si l'on souhaite les exprimer : on a $A = M(0, 1, 0)$ est inversible et donc pour toute matrice $X = M(x, y, z) \in E$ on

$$a \ X^2 = A \Leftrightarrow \begin{cases} f(x, y, z)^2 = 1 \\ g(x, y, z)^2 = j \\ h(x, y, z)^2 = j^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x, y, z) = \pm 1 \\ g(x, y, z) = \pm e^{\frac{i\pi}{3}} \\ h(x, y, z) = \pm e^{\frac{2i\pi}{3}} \end{cases} \Leftrightarrow X = P \operatorname{diag} (1, \pm e^{\frac{i\pi}{3}}, \pm e^{\frac{2i\pi}{3}}) P^{-1}$$