DM n°4.

Exercice

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1 , on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4.$$

1. (a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une seule solution strictement positive, notée u_n.
   (b) Calculer u_1 et u_2.
   (c) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in]0, \frac{2}{3}[$.
2. (a) Montrer que, pour tout x élément de $]0,1[$, on a : $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
   (b) En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis les variations de la suite (u_n).
   (c) Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
3. (a) Déterminer la limite de $(u_n)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   (b) Donner enfin la valeur de ℓ.

Problème : une famille de matrices

Pour tout (a,b,c) de $\mathbb{C}^3$, on note $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & -c & b \\ -b & a & -c \\ c & -b & a \end{pmatrix}$. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

On pose $E = \left\{M(a,b,c), (a,b,c) \in \mathbb{C}^3\right\}$.

Pour tous α, β, γ de $\mathbb{C}$, on note $\operatorname{diag}(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$, et notamment $I = \operatorname{diag}(1,1,1)$.

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer A^n.
   Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.
2. Montrer que E est une sous-anneau commutatif de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
   En donner la dimension et une base.
3. (a) Pour tout λ de $\mathbb{C}$, calculer $(A - \lambda I)\left(A^2 + \lambda A + \lambda^2 I\right)$.
   (b) Montrer que si λ est dans $\left\{1, j, j^2\right\}$ alors $A - \lambda I$ n'est pas inversible.
   (c) Montrer que si λ n'est pas dans $\left\{1, j, j^2\right\}$, alors $A - \lambda I$ est inversible.
   Exprimer alors A_λ^{-1} en fonction de I, A, A^2.
4. Dans toute la suite du problème, on note $\Delta = \operatorname{diag}\left(1, j, j^2\right)$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -j^2 & -j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}$.
   On pose: $\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}), \varphi(M) = P^{-1}MP$.
   (a) Prouver que P est inversible et calculer P^{-1}.
   (b) Montrer que φ est un isomorphisme de l'anneau $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, et préciser φ^{-1}.

(c) Sans utiliser l'expression de P^{-1}, vérifier que $\varphi(A)=\Delta$. Calculer également $\varphi\left(A^2\right)$.

(d) Pour tout (a,b,c) de $\mathbb{C}^3$, montrer que : $\varphi(M(a,b,c))=\operatorname{diag}(f(a,b,c),g(a,b,c),h(a,b,c))$ avec

$$\begin{cases} f(a,b,c)=a+b+c \\ g(a,b,c)=a+jb+j^2c \\ h(a,b,c)=a+j^2b+jc \end{cases}$$

Soit ψ la restriction de φ à E.

(e) Soit ψ la restriction de φ à E. Montrer que ψ est un isomorphisme de E sur la sous-algèbre $\mathcal{D}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ formée des matrices diagonales.

(f) Indiquer une condition nécessaire et suffisante (sur les coefficients a,b,c) pour qu'une matrice $M=M(a,b,c)$ de E soit inversible, et montrer qu'alors M^{-1} est dans E.

5. On reprend ici les notations et résultats de la question (4)

   (a) Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ qui commutent avec Δ.

   (b) Montrer que les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ qui commutent avec A sont les matrices de E.

6. On reprend ici les notations et résultats des questions (4) et (5)

   (a) Soit M une matrice inversible de E.
   Montrer qu'il y a exactement 8 matrices X de E telles que $X^2=M$.

   (b) Montrer qu'il y a exactement 8 matrices X de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $X^2=A$.