Colle 14 : Matrices, structures algébriques

Résultats et preuves à connaître

Proposition 1 Caractérisation des sous-groupes de G

Soit G' un ensemble. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. G' est un sous-groupe de G
2. **SG1** $G' \subset G$
   SG2 $G' \neq \varnothing$
   SG3 $\forall (x,y) \in G'^2, x * y \in G'$ et $x^{-1} \in G'$ (x^{-1} est l'inverse de x dans G)
3. **SG1** $G' \subset G$
   SG2 $G' \neq \varnothing$
   SG3' $\forall (x,y) \in G'^2, x * y^{-1} \in G'$

Proposition 2

Soient $(G, \star)$ et $(H, \otimes)$ deux groupes et $f : G \to H$ un morphisme de groupes.

- $\ker(f)$ est un sous-groupe de $(G, \star)$.
- f est injective si et seulement si $\ker(f) = e_G$

Proposition 3 $\mathbb{U}$ et $\mathbb{U}_n$

$(\mathbb{U}_n, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{U}, \times)$ qui est lui-même un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Proposition 4

Soient $(G, \star)$ et $(H, \otimes)$ deux groupes et $f : G \to H$ un morphisme de groupes.

- $Im(f)$ est un sous-groupe de $(H, \otimes)$.
- f est surjective si et seulement si $Im(f) = H$

Proposition 5 Calculs dans un anneau

Soit $(A, +, *)$ un anneau, alors pour tout élement $a \in A$

1. $\forall a \in A, \forall (b_1, \dots, b_p) \in A^p, \displaystyle\sum_{i=1}^{p} (a * b_i) = a * \left(\sum_{i=1}^{p} b_i \right)$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} (b_i * a) = \left(\sum_{i=1}^{p} b_i \right) * a$
2. $\forall (a_1, \dots, a_n) \in A^n, \forall (b_1, \dots, b_p) \in A^p, \displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) * \left(\sum_{j=1}^{p} b_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} (a_i * b_j)$
3. $\forall a \in A, \forall n \in \mathbb{N}, (1_A - a) * \displaystyle\left(\sum_{i=0}^{n} a^i \right) = \left(\sum_{i=0}^{n} a^i \right) * (1_A - a) = 1_A - a^{n+1}$

Proposition 6 Formule du binôme dans un anneau

$\forall (a,b) \in A^2$ tels que $a*b = b*a$ alors

$\forall n \in \mathbb{N},\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k * b^{n-k}$

Proposition 7 Ensemble des inversibles d'un anneau

L'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $(A,+,*)$, noté A^*, est un groupe pour la loi $*$.

Exercice 1 Exemple d'anneau

$(\mathbb{Z}[i],+,\times)$ est un anneau À démontrer et $(\mathbb{Q}[i],+,\times)$ est un corps justifier que tous les éléments non-nuls admettent un inverse dans ce même ensemble

Proposition 8 Produit de matrices (On ne démontrera que le premier point : c'est le meilleur !)

Sous condition d'existence,

i) $A\times(B\times C) = (A\times B)\times C$: $\times$ est associative.

ii) $A\times(B+C) = A\times B + A\times C$ et $(A+B)\times C = A\times C + B\times C$: $\times$ est distributive par rapport à $+$.

iii) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ (\lambda A)\times B = A\times(\lambda B) = \lambda(A\times B)$.

Proposition 9 Transposée

Sous condition d'existence (que l'on devra rappeler),

i) $(A^T)^T = A$

ii) $(A+B)^T = A^T + B^T$

iii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, (\lambda A)^T = \lambda A^T$

iv) $(A\times B)^T = B^T \times A^T$

À savoir faire

- ☐ Montrer qu'un ensemble muni d'une loi de composition (respectivement : 2 lois) est un sous-groupe (respectivement : sous-anneau) d'un groupe ou d'un anneau connu.
- ☐ Déterminer si une fonction est un morphisme de groupe/ un morphisme d'anneaux.
- ☐ Déterminer si une loi de composition donnée est : interne/associative/commutative/possède un élément neutre. Lorsqu'il existe un élément neutre : déterminer les éléments inversibles.

Ce qu'en dit le programme

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
b) Structure de groupe	
Sous-groupe : définition, caractérisation.	
Morphisme de groupes. Image et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme.	
Image et noyau d'un morphisme. Condition d'injectivité.	Notations $Im f$, $\ker f$.
Isomorphisme.	
c) Structures d'anneau et de corps	
Anneau.	Tout anneau est unitaire. Exemples usuels : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.
Calcul dans un anneau.	Relation $a^n - b^n$ et formule du binôme si a et b commutent.
Groupe des inversibles d'un anneau.	
Anneau intègre. Corps.	Les corps sont commutatifs.
Sous-anneau.	
Morphisme d'anneaux. Isomorphisme.	

Calcul matriciel et systèmes linéaires

Le but de cette section est de présenter une initiation au calcul matriciel. Ainsi, on prépare l'étude géométrique de l'algèbre linéaire menée au second semestre, on revient sur l'étude des systèmes linéaires et on obtient des exemples fondamentaux d'anneaux.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Opérations sur les matrices	
Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$. Addition, multiplication par un scalaire, combinaisons linéaires.	
Matrices élémentaires.	Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire de matrices élémentaires.
Produit matriciel ; bilinéarité, associativité.	Si X est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A.
Produit d'une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.	Symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$.
Transposée d'une matrice.	Notation $A^\top$.
Opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit.	