Colle 13 : Suites et structures algébriques

Résultats et preuves à connaître

Proposition 1 Suites récurrentes définies par $u_{n+1} = f(u_n)$

Si $f(I) \subseteq I$, alors la suite est bien définie (avoir le justifier) et

- Si f est croissante sur I alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
- Si f est décroissante, alors les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones, de monotonies contraires.

Proposition 2 Théorème de croissances comparées

- $n^\alpha = \underset{n\to+\infty}{o}(n^\beta) \iff \alpha < \beta$
- $a^n = \underset{n\to+\infty}{o}(b^n) \iff |a| < |b|$
- Soient $a > 1, \alpha > 0, \beta > 0$

$$\ln^\beta(n) = \underset{n\to+\infty}{o}(n^\beta), \quad n^\beta = \underset{n\to+\infty}{o}(a^n), \quad a^n = \underset{n\to+\infty}{o}(n!), \quad n! = \underset{n\to+\infty}{o}(n^n)$$

Proposition 3 Relation d'équivalence

$\underset{n\to+\infty}{\sim}$ est une relation d'équivalence

(R) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$

(S) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Longrightarrow v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$

(T) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n \Longrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$

Proposition 4 Équivalents usuels Tous sont à connaître, seul $\sin(u_n)$ et $1-\cos(u_n)$ à démontrer

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers 0.

- $\sin(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$
- $1-\cos(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{u_n^2}{2}$
- $\tan(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$
- $\operatorname{sh}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$
- $1-\operatorname{ch}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{u_n^2}{2}$
- $\operatorname{th}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$
- $\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$
- $e^{u_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$
- $(1+u_n)^\alpha - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha u_n \quad (\alpha \neq 0)$

Proposition 5 Lien entre équivalents et petits o

$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ si et seulement si $u_n = v_n + \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$

Proposition 6 Opérations sur $\underset{+\infty}{\sim}$

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $x_n \underset{+\infty}{\sim} y_n$ alors

$u_n x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n y_n$ (produit), $\dfrac{u_n}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{v_n}{y_n}$ (quotient), $u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^\alpha$ (puissance)

Définition 1

Donner les définitions de "loi de composition interne", "l.c.i associative", "l.c.i commutative", "élément neutre", "inverse d'un élément x pour la l.c.i $*$. Donner un exemple (sans démonstration) de groupe commutatif, de groupe non commutatif et un exemple de groupe fini.

Proposition 7 Unicité de l'élément neutre et de l'inverse + une propriété de l'inverse

Soit $*$ une lci associative sur E
Si $*$ admet un élément neutre, alors il est unique.
Si $x \in E$ admet un inverse alors il est unique, on le notera x^{-1}.
Si x et y sont inversibles, alors $x * y$ l'est aussi et l'on a $(x*y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$

Proposition 8 Ensemble des permutations de X

Soit X un ensemble (fini ou non). On note S_X l'ensemble des bijections de X dans X (ou encore ensemble des permutations de X).
$(S_X, \circ)$ est un groupe, et lorsque X possède au moins trois éléments, celui-ci est non abélien.

Proposition 9 Produit de groupes

Soient $(G, \star)$ et $(H, \otimes)$ deux groupes. On munit l'ensemble $G \times H$ de la loi de composition # interne suivante :

$$\forall ((g_1,h_1),(g_2,h_2)) \in (G\times H)^2 \ , \ (g_1,h_1)\#(g_2,h_2) \underset{def}{=} (g_1 \star g_2, h_1 \otimes h_2).$$

$(G \times H, \#)$ est alors un groupe.

À savoir faire

Exercices : d'abord et un exercice sur les suites PUIS un second exercice sur les structures algébriques ou sur les suites.

- ☐ Étude des suites récurrentes donnée par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$: si f est croissante, u est monotone, et si f est décroissante, on étudie les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. On étudie les points fixes, les intervalles stables par f.
- ☐ Trouver des équivalents en $+\infty$ de suites, s'en servir pour obtenir des limites
- ☐ Prouver qu'un ensemble muni d'une loi de composition $*$ est un groupe ou n'en est pas un.

Le programme officiel

Structures algébriques usuelles

Cette section a pour but l'introduction des notions les plus élémentaires relatives aux groupes, anneaux, corps, afin de traiter de manière unifiée un certain nombre de situations.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Loi de composition interne	
Loi de composition interne. Associativité, commutativité, élément neutre, inversibilité, distributivité. Partie stable.	On évite l'étude de lois artificielles. Inversibilité et inverse du produit de deux éléments inversibles.
b) Structure de groupe	
Groupe.	Notation x^n dans un groupe multiplicatif, nx dans un groupe additif. Exemples usuels : groupes additifs $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, groupes multiplicatifs $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Q}_+^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{U}$, $\mathbb{U}_n$.
Groupe des permutations d'un ensemble.	Notation S_X.
Groupe produit.	
Sous-groupe : définition, caractérisation.	