DM n°3.

Exercice 1

$$\varphi : x \mapsto 3xe^{-x^2} - 1.$$

1. Justifier que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer la dérivée de φ.
2. Dresser le tableau des variations de φ et représenter l'allure de la courbe représentative de φ.

   On considère l'équation différentielle suivante, d'inconnue y :

$$xy' - \left(1 - 2x^2\right) y = 1 - 2x^2.$$

3. Résoudre l'équation homogène associée à (E) sur $]0, +\infty[$.
4. Trouver une solution particulière à (E) (on pourra la chercher sous forme de fonction constante), puis écrire l'ensemble des solutions de (E) sur $]0, +\infty[$.
5. Déterminer également l'ensemble des solutions de (E) sur $]-\infty, 0[$.

   On souhaite désormais déterminer toutes les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ qui satisfont l'équation (E).
6. Montrer que φ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
7. Justifier que si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ qui satisfait l'équation (E) alors il existe deux constantes $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} C_1 xe^{-x^2} - 1 \text{ si } x \in]0, +\infty[, \\ \quad -1 \text{ si } x = 0, \\ C_2 xe^{-x^2} - 1 \text{ si } x \in]-\infty, 0[. \end{cases}$$

8. Avec les notations de la question précédente, montrer, en utilisant la continuité de f', que $C_1 = C_2$.
9. Déterminer finalement toutes les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation (E).

Exercice 2

Soit u la suite définie par $u_0 \in [0,1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \dfrac{3}{2x^2+1}$.

1. Dresser le tableau de variations de f. Déterminer les limites possibles de u.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \in [0,1]$ et $u_{2n+1} \in [1,3]$.
3. (a) Montrer que tout point fixe de f est aussi point fixe de $f \circ f$. En déduire la factorisation de $(f \circ f)(x) - x$.

   (b) Déterminer le signe de $(f \circ f)(x) - x$ puis en déduire, suivant les cas, la monotonie de (u_{2n}) et (u_{2n+1}).
4. Étudier la convergence de (u_{2n}) et (u_{2n+1}) puis conclure quant à celle de u.