# Correction du DS n°4.

## Durée : 4 heures

### Question de cours

Rappeler la définition de "suites adjacentes" et prouver le théorème des suites adjacentes

$u$ et $s$ sont dites adjacentes si elles sont de monotonies contraires et que leur diférence converge vers 0.

Théorème : si deux suites sont adjacentes, elles sont convergentes et ont la même limite.

Preuve : quitte à les intervertir, $u$ est croissante et $v$ est décroissante. Donc $-v$ est croissante et donc en tant que somme de suites croissantes $u-v$ est croissante. Comme $u-v$ converge vers 0 et qu'elle est croissante, on en déduit que 0 est sa borne supérieure, donc pour tout entier $n$ ,$u_n - v_n \leq 0$ ainsi, $u_n \leq v_n \leq v_0$ puisque $v$ décroît. Et donc $u$ est croissante majorée, donc converge ; on note $\ell$ sa limite. Comme $v = u + (v-u)$ est la somme de $u$ qui converge vers $\ell$ et de $v-u$ qui converge vers 0, on obtient que $v$ converge aussi ver $\ell$.

### Exercice 1 : divers

1. Soit $u$ la suite définie pour tout entier $n$ par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_1 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_{n+2} = 7u_{n+1} - 10u_n. \end{cases}$.

   On résout l'EC $X^2 - 7X + 10 = 0$ il y a deux solutions : 2 et 5. Il existe deux constantes $A$ et $B$ tel que pour tout entier $n$ on ait $u_n = A2^n + B5^n$. Pour trouver ces constantes on a $\begin{cases} A+B=4 \\ 2A+5B=-1 \end{cases} \underset{\Leftrightarrow}{L_2 <--L_2 - 2L_1} \begin{cases} A+B=4 \\ 3B=-9 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} A=7 \\ B=-3 \end{cases}$ Donc pour tout entier $n$ on a $\boxed{u_n = 7\times 2^n - 3\times 5^n}$

2. Soit

$$A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

   Pour tout entier $n$ on a $-1 \leq (-1)^n + \frac{1}{n+1} \leq 1 + \frac{1}{1} = 2$ donc $A$ est borné, et pour $n=0$ on a $(-1)^0 + \frac{1}{1+0} = 2$ donc $A \neq \emptyset$. $A$ est bornée, non vide, donc admet une borne supérieure et inférieure. De plus, 2 est un majorant qui appartient à $A$ donc c'est un maximum.

   Montrons que $-1$ est la borne inférieure : c'est déjà un minorant, il suffit d'exhiber une suite d'élément de $A$ qui converge vers $-1$, comme $\left((-1)^{2n+1} + \frac{1}{2n+1+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ c'est bien une suite de $A^{\mathbb{N}}$ et elle converge vers $-1$. $-1$ est donc la borne inférieure, mais ne fait pas partie de $A$ puisque tout élément de $A$ est en fait strictement supérieur à $-1$ : c'est donc un infimum mais pas un minimum.

3. Determiner la limite quand $n$ tend vers $+\infty$ de $\frac{\sqrt{1-\cos(\frac{5}{n})}}{\ln(1+\frac{2}{\sqrt{n}})\sqrt{\sin(\frac{3}{n+1})}}$

   On $\frac{5}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ donc $1-\cos(\frac{5}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{5^2}{2n^2}$ et donc $\sqrt{1-\cos(\frac{5}{n})} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{5}{\sqrt{2}n}$

   De plus $\frac{2}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ donc $\ln(1+\frac{2}{\sqrt{n}}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{n}}$ et

   $\frac{3}{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ donc $\sin(\frac{3}{n+1}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{n}$ comme cet équivalent est positif, $\sin(\frac{3}{n+1})$ est positif à partir d'un certain rang et l'on a $\sqrt{\sin(\frac{3}{n+1})} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}$

   Ainsi $\frac{\sqrt{1-\cos(\frac{5}{n})}}{\ln(1+\frac{2}{\sqrt{n}})\sqrt{\sin(\frac{3}{n+1})}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{5}{\sqrt{2}n}}{\frac{2}{\sqrt{n}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}} = \frac{5}{\sqrt{6}}$

Ainsi, on peut dire que $\frac{\sqrt{1-\cos(\frac{5}{n})}}{\ln(1+\frac{2}{\sqrt{n}})\sqrt{\sin(\frac{3}{n+1})}} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} \frac{5}{\sqrt{6}}$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
   Pour $n = 1, a_1 = 2$ et $b_1 = 1$ conviennent. Supposons la propriété établie au rang $n \geqslant 1$.

   $$(2+\sqrt{3})^{n+1} = (2+\sqrt{3})\left(a_n + b_n\sqrt{3}\right) = a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{3}$$

   avec $a_{n+1} = 2a_n + 3b_n$ et $b_{n+1} = a_n + 2b_n$ de sorte que

   $$3b_{n+1}^2 - a_{n+1}^2 = -a_n^2 + 3b_n^2 = -1$$

   Récurrence établie.

   (b) $a_n - 1 \leqslant b_n\sqrt{3} < a_n$ donc $2a_n - 1 \leqslant (2+\sqrt{3})^n < 2a_n$ donc

   $$\left\lfloor (2+\sqrt{3})^n \right\rfloor = 2a_n - 1$$

   C'est un entier impair.

## Exercice 2 : Résolution d'une EDL2 par changement de variable

On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$x^2y" - 3xy' + 4y = 0. \ (E)$$

1. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2, mais à coefficients non constants.

2. **Analyse.** Soit $y$ une solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $z(t) = y(e^t)$.

   (a) En tant que composée de fonction deux fois dérivables (et $exp$ étant à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ qui est le domaine de définition de $y$) $z$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a pour tout réel $t$
   - $z'(t) = e^t y'(e^t)$
   - $z''(t) = e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t) = (e^t)^2 y''(e^t) + e^t y'(e^t)$.

   On a donc pour tout réel $t$ , en posant $x = e^t$
   $z''(t) - 4z'(t) + 4z(t) = (e^t)^2 y''(e^t) + e^t y'(e^t) - 4e^t y'(e^t) + 4y(e^t) = x^2 y''(x) - 3xy'(x) + 4y(x) = 0$ donc $z$ est solution de l'EDL à coefficients constants

   $$z'' - 4z' + 4z = 0$$

   (b) On résout l'équation caractéristique associée : $X^2 - 4X + 4 = 0 \Leftrightarrow (X-2)^2 = 0$ il s'agit donc d'une unique racine double, valant 2.
   On en déduit qu'il existe deux constantes $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ telles que pour tout réel $t$ on ait

   $$z(t) = (At + B)e^{2t}$$

   Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln(x)$ est bien défini et l'on peut donc utiliser cette expression pour $t = \ln(x)$ : on a alors $z(\ln(x)) = (A\ln(x) + B)e^{2\ln(x)} = (A\ln(x) + B)x^2$ or $z(\ln(x)) = y(x)$

3. **Synthèse.**

   Soit $A$ et $B$ deux réels. On considère la fonction $y : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (A\ln(x)+B)x^2 \end{array} \right.$ Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$ on a $y'(x) = \frac{A}{x}x^2 + 2(A\ln(x) + B)x = x(2A\ln(x) + A + 2B)$ et $y''(x) = (2A\ln(x) + A + 2B) + x(\frac{2A}{x}) = 2A\ln(x) + 3A + 2B$
   On a donc

$x^2y''(x)-3xy'(x)+4y(x)=x^2(2A\ln(x)+3A+2B)-3x^2(2A\ln(x)+A+2B)+4(A\ln(x)+B)x^2$
ce qui donne $x^2y''(x)-3xy'(x)+4y(x)=x^2\left(2A\ln(x)+3A+2B-6A\ln(x)-3A-6B+4A\ln(x)+4B\right)=0$ Ainsi $y$ est solution.
Conclusion l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S}=\left\{y:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^{+*} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & (A\ln(x)+B)x^2\end{array}\right. , \quad (A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

## Problème 1 : à propos des équations différentielles d'ordre 3.

### A. Généralités.

1. Par définition, $d(x) = f^{(3)} + af'' + bf' + cf$, donc $y$ est solution de $(E)$ si et seulement si $y^{(3)} + ay'' + by' + cy = f^{(3)} + af'' + bf' + cf$, soit $(y-f)^{(3)} + a(y-f)'' + b(y-f)' + c(y-f) = 0$, c'est-à- dire si et seulement si $y-f$ est solution de $(H)$.

2. Supposons donc $y_p(x) = Ae^{kx}$, alors $y_p'(x) = kAe^{kx}, y_p''(x) = k^2Ae^{kx}$ et $y_p^{(3)}(x) = k^3Ae^{kx}$. La fonction $y_p$ est donc solution de ( $E$ ) (après simplification par les exponentielles) si et seulement si $A\left(k^3+ak^2+bk+c\right) = 1$. Si $k$ est solution de l'équation caractéristique, cette équation n'a manifestement pas de solution, mais dans le cas contraire, il suffit de poser $A = \frac{1}{k^3+ak^2+bk+c}$ pour obtenir une solution de $(E)$.

3. On doit avoir $r^3 + ar^2 + br + c = (r-k)^3 = r^3 - 3r^2k + 3rk^2 - k^3$. Par identification des coefficients, $a = -3k$, donc $6k + 2a = 2(a+3k) = 0$, puis $3k^2 = b$, donc $3k^2 + 2ak + b = 3k^2 - 6k^2 + 3k = 2 = 0$, et enfin $c = -k^3$, donc $k^3 + ak^2 + bk + c = k^3 - 3k^3 + 3k^2 - k^3 = 0$ (cette dernière égalité était de toute façon triviale puisqu'elle indique juste que $k$ est racine de l'équation caractéristique).

4. Posons donc $y_p(x) = Ax^3e^{kx}$, alors $y_p'(x) = \left(kAx^3 + 3Ax^2\right)e^{kx}, y_p''(x) = \left(k^2Ax^3 + 6kAx^2 + 6Ax\right)e^{kx}$ et $y_p^{(3)}(x) = \left(k^3Ax^3 + 9k^2Ax^2 + 18kAx + 6A\right)e^{kx}$. La fonction $y_p$ est donc solution de $(E)$ (toujours en se débarassant des exponentielles) si $k^3Ax^3 + 9k^2Ax^2 + 18kAx + 6A + ak^2Ax^3 + 6akAx^2 + 6aAx + bkAx^3 + 3bAx^2 + cAx^3 = 1$, soit $A\left(k^3+ak^2+bk+c\right)x^3 + A\left(9k^2+6ak+3b\right)x^2 + A(18k+6a)x + 6A = 1$. D'après la question précédente, les coefficients devant $x^3$, devant $x^2$ et devant $x$ s'annulent (ce sont ceux qu'on a calculés à un facteur près) et il ne reste donc que la condition 6 A $= 1$ à vérifier. Autrement dit, $y_p : x \mapsto \frac{1}{6}x^3e^{kx}$ est solution particulière de $(E)$.

5. Supposons donc que $y_1^{(3)} + ay_1'' + by_1' + cy_1 = d_1(x)$, et que $y_2^{(3)} + ay_2'' + by_2' + cy_2 = d_2(x)$, alors il suffit d'additionner les deux équations et d'appliquer la linéarité de la dérivation pour obtenir $(y_1+y_2)^{(3)} + a(y_1+y_2)'' + b(y_1+y_2)' + c(y_1+y_2) = d_1(x) + d_2(x)$, ce qui est exactement l'énoncé du principe de superposition.

### B. Un cas particulier.

1. Posons donc $y(x) = e^{-2x}\cos(x)$, alors $y'(x) = -2e^{-2x}\cos(x) - e^{-2x}\sin(x) = (-2\cos(x) - \sin(x))e^{-2x}$, puis $y''(x) = (4\cos(x) + 2\sin(x))e^{-2x} + (2\sin(x) - \cos(x))e^{-2x} = (3\cos(x) + 4\sin(x))$, et enfin $y^{(3)}(x) = (-6\cos(x) - 8\sin(x))e^{-2x} + (-3\sin(x) + 4\cos(x))e^{-2x} = (-2\cos(x) - 11\sin(x))e^{-2x}$. On remplace tout dans le membre de gauche de l'équation : $y^{(3)}(x) + 5y''(x) + 9y'(x) + 5y(x) = e^{-2x}(-2\cos(x) - 11\sin(x) + 15\cos(x) + 20\sin(x) - 18\cos(x) - 9\sin(x) + 5\cos(x)) = 0$, ce qui prouve que $y$ est solution de ( $H_1$ ).

2. L'équation $r^3 + 5r^2 + 9r + 5 = 0$ admet $r = -1$ comme solution évidente : $-1 + 5 - 9 + 5 = 0$. On peut donc factoriser le membre de gauche sous la forme $r^3 + 5r^2 + 9r + 5 = (r+1)\left(ar^2 + br + c\right) = ar^3 + (a+b)r^2 + (b+c)r + c$. Par identification des coefficients, $a = 1$, puis $a + b = 5$, donc $b = 4$, et $b + c = 9$ donc $c = 5$, ce qui est cohérent avec l'équation du coefficient constant. Reste à chercher les racines de $r^2 + 4r + 5 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 16 - 20 = -4$ et admet donc pour racines $r_1 = \frac{-4-2i}{2} = -2 - i$ et $r_2 = \frac{-4+2i}{2} = -2 + i$. Finalement, $\mathcal{S} = \{-1, -2+i, -2-i\}$.

3. C'est la même démonstration que pour le deuxième ordre : si $y(x) = e^{rx}$, alors $y'(x) = re^{rx}$, $y''(x) = r^2e^{rx}$ et $y^{(3)}(x) = r^3e^{rx}$, donc la fonction $y$ est solution de $(H_1)$ si et seulement si $e^{kx}\left(r^3 + 5r^2 + 9r + 5\right) = 0$, donc si $r$ est solution de l'équation caractéristique.

4. Les fonctions $x \mapsto e^{-x}, x \mapsto e^{-2x+ix}$ et $x \mapsto e^{-2x-ix}$ sont donc solutions de ( $H_1$ ). D'après le principe de superposition, toute addition de deux solutions de ( $H_1$ ) est encore solution de ( $H_1$ ) et de même pour tout multiple d'une solution de ( $H_1$ ) (ça c'est évident, le membre de gauche de l'équation étant simplement multiplié par une constante). En particulier, $x \mapsto \frac{e^{-2x+ix}+e^{-2x-ix}}{2} = e^{-2x} \times \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = e^{-2x}\cos(x)$ est aussi solution de $(H_1)$. De même, $x \mapsto \frac{e^{-2x+ix}-e^{-2x-ix}}{2i} = e^{-2x}\sin(x)$ est aussi solution. Toutes les fonctions proposées dans l'énoncé sont donc également solutions de ( $H_1$ ) par superposition.

5. (a) En effet, $z' = y^{(3)} + 4y'' + 5y'$, donc $z' + z = y^{(3)} + 5y'' + 9y' + 5y = 0$.
   (b) Aucun calcul nécessaire, les solutions sont toutes les fonctions de la forme $z : x \mapsto Ke^{-x}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

(c) Il s'agit d'une équation du second ordre à coefficients constants. On a déjà résolution l'équation caractéristique plus haut, les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme $y_h : x \mapsto Ae^{-2x}\cos(x) + Be^{-2x}\sin(x)$, avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$. Reste à trouver une solution particulière de la forme $y_p(x) = Le^{-x}$. On aura alors $y_p'(x) = -Le^{-x}$, puis $y_p'' = y_p$ et $y_p$ est solution de l'équation si $L - 4L + 5L = \lambda$, soit $L = \frac{\lambda}{2}$. Les solutions de notre équation sont donc toutes les fonctions de la forme $y : x \mapsto A\cos(x)e^{-2x} + B\sin(x)e^{-2x} + \frac{\lambda}{2}e^{-x}$, avec $(A,B,\lambda) \in \mathbb{R}^3$.

(d) Il n'y a en fait presque rien à rédiger : si $y$ est solution de ( $H_1$ ), alors $z$ est solution de $z' + z = 0$, donc $z = y'' + 4y' + 5y = \lambda e^{-x}$ pour un certain réel $\lambda$. D'après la question précédente, $y$ est alors nécessairement de la forme $x \mapsto A\cos(x)e^{-2x} + B\sin(x)e^{-2x} + \frac{\lambda}{2}e^{-x}$, ce qui prouve bien la réciproque souhaitée (il suffit de renommer les constantes).

6. Avec les notations de la question 4 , on a donc $y'(x) = -Ae^{-x} - 2B\cos(x)e^{-2x} - B\sin(x)e^{-2x} - 2C\sin(x)e^{-2x} + C\cos(x)e^{-2x}$, puis $y''(x) = Ae^{-x} + 3B\cos(x)e^{-2x} + 4B\sin(x)e^{-2x} - 4C\cos(x)e^{-2x} + 3C\sin(x)e^{-2x}$. Les conditions proposées imposent donc $A + B = 2, -A - 2B + C = -2$ et $A + 3B - 4C = -2$. Pour une fois, on va procéder par substitution : $A = 2 - B$, donc en remplaçant dans la deuxième équation $-B + C = 0$, soit $C = B$. On remplace tout dans la troisième équation : $2 - B + 3B - 4B = -2$, soit $-2B = -4$, donc $B = 2$, dont on déduit $C = 2$ et $A = 0$. Finalement, $y_0(x) = 2(\cos(x) + \sin(x))e^{-2x}$.

7. La fonction $y_0$ s'annule quand $\cos(x) + \sin(x) = 0$, donc si $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$. Ceci ne peut se produire que si $x \equiv -\frac{\pi}{2} - x[2\pi]$, donc $x \equiv -\frac{\pi}{4}[\pi]$.

8. Il s'agit d'une fonction sinusoïdale pondérée par une exponentielle décroissante, on a déjà croisé ce type de courbes en cours. Ici, le problème si on essaie vraiment de tracer correctement la courbe est que l'exponentielle tend trop vite vers 0 , ce qui «écrase» très rapidement les variations périodiques. En pratique, à une échelle raisonnable, on ne voit rien (en pointillés rouges, les deux exponentielles opposées qui encadrent la courbe de la fonction $y_0$ ) :

9. On connait déjà les solutions de l'équation homogène, il ne reste plus qu'à trouver une solution particulière. On va pour cela procéder par superposition (en écrivant $34\,\mathrm{ch}(2x) = 17e^{2x} + 17e^{-2x}$ ): cherchons d'abord une solution $y_1$ de l'équation $y^{(3)} + 5y'' + 9y' + 5y = 17e^{2x}$ sous la forme $y_1(x) = Ke^{2x}$. On aura alors $y_1'(x) = 2Ke^{2x}, y_1''(x) = 4Ke^{2x}$ et $y_1^{(3)}(x) = 8Ke^{2x}$, donc $y_1$ convient si $8K + 20K + 18K + 5K = 17$, soit $K = \frac{17}{51} = \frac{1}{3}$. De même, on cherche une solution $y_2$ de l'équation $y^{(3)} + 5y'' + 9y' + 5y = 17e^{-2x}$ sous la forme $y_2(x) = Le^{2x}$. On aura alors $y_2'(x) = -2Le^{2x}$, $y_2''(x) = 4Le^{2x}$ et $y_2^{(3)}(x) = -8Le^{2x}$, donc $y_2$ convient si $-8L + 20L - 18L + 5L = 17$, soit $L = -17$. Par superposition, la fonction $y_p : x \mapsto \frac{1}{3}e^{2x} + 17e^{-2x}$ est donc solution particulière de notre équation, dont toutes les solutions sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ae^{-x} + B\cos(x)e^{-2x} + C\sin(x)e^{-2x} + \frac{1}{3}e^{2x} + 17e^{-2x}$.

**Problème 2 : Des suites**

1. On désigne par $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de réels définie par la relation de récurrence (A)

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad C_{n+1} = \sqrt{\frac{1+C_n}{2}}$$

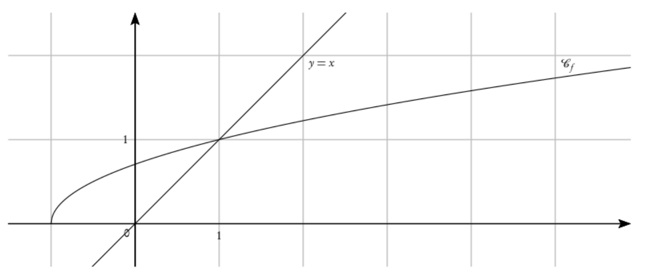
et la donnée de sont premier terme $C_0$ où $C_0 \in [1,+\infty[$.

(a) La fonction $f$ est définie sur $[-1,+\infty[$ croissante sur $[-1,+\infty[$ comme composée donc pour tout $x \in [1,+\infty[$, on a $f(x) \geqslant f(1) = 1$. Et pour tout $x \in [1,+\infty[$, on a

$$\begin{aligned} f(x) \leqslant x &\iff \sqrt{\frac{1+x}{2}} \leqslant x \\ &\iff \frac{1+x}{2} \leqslant x^2 \qquad \text{car}\, x \in \mathbb{R}_+ \\ &\iff 2x^2 - x - 1 \geqslant 0, \end{aligned}$$

or $x \geqslant 1$ donc $x^2 \geqslant x$, donc $2x^2 - x - 1 \geqslant x - 1 \geqslant 0$ et donc $f(x) \leqslant x$.
On a donc bien

$$\forall x \in [1,+\infty[ \quad 1 \leqslant f(x) \leqslant x$$




(b) Pour tout $x \in [1,+\infty[$, on a $f(x) \geqslant 1$ donc $f(x) \in [1,+\infty[$. Donc $[1,+\infty[$ est stable par $f$.

(c) L'intervalle $[1,+\infty[$ est stable par $f$ et $C_0 \in [1,+\infty[$. Donc la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est correctement définie sur $\mathbb{N}$ et l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, C_n \in [1,+\infty[$$

(d) Puisque $f(1) = 1$, si $C_0 = 1$, alors par récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}, C_n = 1$.

(e) Pour tout entier naturel $n$, on a $C_n \in [1,+\infty[$ donc

$$1 \leqslant f(C_n) \leqslant C_n$$

et donc $C_{n+1} \leqslant C_n$. Donc $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Donc la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 1. D'après le théorème de la limite monotone, $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge de limite $\ell \in [1,+\infty[$. $f$ étant continue sur $[-1,+\infty[$, $f$ est continue en $\ell$ et donc

$$C_{n+1} = f(C_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell).$$

Or, $C_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ donc par unicité de la limite, $f(\ell) = \ell$. Par ailleurs,

$$
\begin{aligned}
f(\ell)=\ell & \Longleftrightarrow \sqrt{\tfrac{\ell+1}{2}}=\ell \\
& \Longleftrightarrow \tfrac{\ell+1}{2}=\ell^2 \\
& \Longleftrightarrow 2\ell^2-\ell-1=0 \\
& \Longleftrightarrow \ell=1 \text{ ou } \ell=-\tfrac{1}{4} \\
& \Longleftrightarrow \ell=1 \qquad\qquad \text{car}\, \ell\in\mathbb{R}_+ \\
& \Longleftrightarrow \ell=1
\end{aligned}
$$

Donc $\ell=1$. Finalement, la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

2. On définit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs par les relations de récurrence

$$
\forall n\in\mathbb{N}\quad \left\{\begin{array}{l} a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+b_n\right) \\ b_{n+1}=\sqrt{a_{n+1}b_n} \end{array}\right. \tag{B}
$$

et la donnée de $(a_0,b_0)\in]0,+\infty[^2$.

(a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n, a_n$ et $b_n$ existent et sont (strictement) positifs.

- $a_0$ et $b_0$ existent et sont strictement positifs.
- Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $a_n$ et $b_n$ existent et sont strictement positifs.

On peut définir $a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$ et $a_{n+1}$ est strictement positif car $a_n$ et $b_n$ le sont.
On a alors $a_{n+1}b_n>0$ donc $b_{n+1}=\sqrt{a_{n+1}b_n}$ existe et est strictement positif.
Ainsi, les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont correctement définies sur $\mathbb{N}$ et qu'elles sont strictement positives.

(b) On a

$$
\forall n\in\mathbb{N}\quad a_n=b_n\Longrightarrow a_{n+1}=b_{n+1}=a_n=b_n
$$

Donc par récurrence immédiate, si $a_0=b_0$, alors les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont constantes à $a_0\,(=b_0)$.
Dans la suite on supposera que $a_0<b_0$.

(c)
- Montrons par récurrence que pour entier naturel $n$, on a $a_n<b_n$.
- On a bien $a_0<b_0$ par hypothèse.
- Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $a_n<b_n$. On a

$$
b_{n+1}-a_{n+1}=\sqrt{a_{n+1}b_n}-a_{n+1}=\sqrt{a_{n+1}}\left(\sqrt{b_n}-\sqrt{a_n}\right)>0
$$

car $\sqrt{\ }$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+, b_n>a_n$ et car $a_{n+1}>0$. Donc $a_{n+1}<b_{n+1}$.
Ainsi, pour entier naturel $n$, on a $a_n<b_n$.

- Pour tout entier naturel $n$, on a $b_n>a_n$ donc

$$
a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}>\frac{a_n+a_n}{2}=a_n
$$

et $b_{n+1}=\sqrt{a_{n+1}b_n}, a_{n+1}<b_{n+1}$ et $b_n>0$ donc

$$
b_{n+1}^2=a_{n+1}b_n<b_{n+1}b_n
$$

et puisque $b_{n+1}>0$, il vient $b_{n+1}<b_n$.
Par conséquent, les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement strictement croissantes et décroissantes.

- D'après les deux points précédents, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < a_0 < a_n < b_n < b_0.$$

Donc la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $b_0$ et la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $a_0$. D'après le théorème de la limite monotone, ces deux suites convergent. Notons $\ell_a$ et $\ell_b$ leurs limites respectives. On a

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ell_a + \ell_b}{2}$$

et $a_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_a$ donc par unicité de la limite,

$$\frac{\ell_a + \ell_b}{2} = \ell_a$$

et ainsi, $\ell_a = \ell_b$. Enfin, on a

$$0 < a_0 \leqslant \ell_a = \ell_b \leqslant b_0$$

donc cette limite commune est strictement positive.

(d) La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et

$$b_n - a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_b - \ell_a = 0.$$

Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc adjacentes.

Pour tout entier naturel $n$, on a

$$b_n\gamma_{n+1} = b_n \times \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = b_n \times \frac{a_{n+1}}{\sqrt{a_{n+1}b_n}} = \sqrt{a_{n+1}b_n} = b_{n+1}$$

donc

$$\gamma_{n+1} = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\sqrt{a_{n+1}b_n}}{b_n} = \frac{\sqrt{\frac{a_n+b_n}{2}}}{\sqrt{b_n}} = \sqrt{\frac{\frac{a_n}{b_n}+1}{2}} = \sqrt{\frac{\gamma_n+1}{2}}.$$

Donc la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie bien la relation (A).

3. (a) On a $\gamma_0 = \frac{a_0}{b_0} \in \left]0,1\right[$ car $0 < a_0 < b_0$. Or, la fonction cos induit une bijection (strictement décroissante) de $]0, \frac{\pi}{2}[$ sur $]0,1[$ donc il existe un unique $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\gamma_0 = \cos(\alpha)$.
Remarque $-\alpha = \text{Arccos}\,(\gamma_0)$.

(b) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n$, on a

$$\mathscr{P}(n) \quad \gamma_n = \cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) \quad \text{et} \quad b_n = b_0\frac{\sin(\alpha)}{2^n \sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}.$$

- On a $\gamma_0 = \cos(\alpha) = \cos\left(\frac{\alpha}{2^0}\right)$ et puisque $\sin(\alpha) \neq 0$,

$$b_0 = b_0\frac{\sin(\alpha)}{2^0 \sin\left(\frac{\alpha}{2^0}\right)}$$

Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie. On a

$$\gamma_{n+1} = \sqrt{\frac{\gamma_n + 1}{2}} = \sqrt{\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) + 1}{2}} = \left|\cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)\right| = \cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right).$$

En effet, pour tout réel $x$, on a

$$\cos^2(x) = \frac{\cos(2x) + 1}{2}$$

donc

$$\sqrt{\frac{\cos(2x) + 1}{2}} = |\cos(x)|.$$

De plus, $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ donc $\frac{\alpha}{2^{n+1}} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et donc $\cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right) \geqslant 0$.
Ensuite,

$$\begin{aligned}
b_{n+1} &= b_n \gamma_{n+1} \\
&= b_0 \frac{\sin(\alpha)}{2^n \sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)} \times \cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right) \\
&= b_0 \frac{\sin(\alpha)}{2^n \sin\left(2 \times \frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)} \times \cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right) \\
&= b_0 \frac{\sin(\alpha)}{2^n \times 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)} \times \cos\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right) \\
&= b_0 \frac{\sin(\alpha)}{2^{n+1} \sin\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \gamma_n = \cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) \quad \text{et} \quad b_n = b_0 \frac{\sin(\alpha)}{2^n \sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}.$$

Enfin, pour tout entier naturel $n$,

$$a_n = b_n \gamma_n = \frac{b_0 \sin(\alpha) \cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}{2^n \sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}.$$

(c) On sait que

$$\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$$

car c'est la limite du taux d'accroissement de sin en 0 . Avec $\frac{\alpha}{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, on en déduit que

$$2^n \sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = \alpha \times \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}{\frac{\alpha}{2^n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha$$

Ainsi, en utilisant la question précédente, on obtient

$$a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{b_0 \sin(\alpha)}{\alpha} \quad \text{et} \quad b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{b_0 \sin(\alpha)}{\alpha}.$$

$$b_{n+1} - a_{n+1} \leqslant \frac{1}{4}(b_n - a_n) \quad \text{puis} \quad b_n - a_n \leqslant \frac{1}{4^n}(b_0 - a_0).$$

- Pour tout entier naturel $n$, on a

$$\begin{aligned} b_{n+1}^2 - a_{n+1}^2 &= a_{n+1} b_n - a_{n+1}^2 \\ &= a_{n+1}\left(b_n - a_{n+1}\right) \\ &= a_{n+1}\left(b_n - \frac{a_n + b_n}{2}\right) \\ &= a_{n+1} \times \frac{b_n - a_n}{2} \\ &= \frac{a_{n+1}}{2}\left(b_n - a_n\right) \end{aligned}$$

et puisque $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_{n+1}^2 - a_{n+1}^2}{b_{n+1} + a_{n+1}}$,

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{2\left(a_{n+1} + b_{n+1}\right)} \times \left(b_n - a_n\right) \leqslant \frac{a_{n+1}}{2\left(a_{n+1} + a_{n+1}\right)} \times \left(b_n - a_n\right) = \frac{1}{4}\left(b_n - a_n\right)$$

où l'on a utilisé que $a_{n+1} < b_{n+1}$.

- Montrons maintenant par récurrence que pour tout entier naturel $n, b_n - a_n \leqslant \frac{1}{4^n}\left(b_0 - a_0\right)$.
- On a bien $b_0 - a_0 \leqslant \frac{1}{4^0}\left(b_0 - a_0\right)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $b_a - a_n \leqslant \frac{1}{4^n}\left(b_0 - a_0\right)$. On a alors

$$b_{n+1} - a_{n+1} \leqslant \frac{1}{4}\left(b_n - a_n\right) \leqslant \frac{1}{4} \times \frac{1}{4^n}\left(b_0 - a_0\right) = \frac{1}{4^{n+1}}\left(b_0 - a_0\right).$$

Ainsi, pour tout entier naturel $n, b_n - a_n \leqslant \frac{1}{4^n}\left(b_0 - a_0\right)$.

5. (a) On a montré que les suites $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeaient vers $b_0 \frac{\sin(\alpha)}{\alpha}$ où $\alpha$ est l'unique élément de $]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\cos(\alpha) = \frac{a_0}{b_0}$. Ici, $\frac{a_0}{b_0} = \frac{1}{2}$ donc $\alpha = \frac{\pi}{3}, \sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et donc

$$b_0 \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}/2}{\pi/3} = \frac{1}{\pi}.$$

Ainsi, les suites $\left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(q_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers $\pi$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a $0 < a_n < b_n$ donc $q_n - p_n \geqslant 0$. Ensuite,

$$q_n - p_n = \frac{b_n - a_n}{a_n b_n} \leqslant \frac{b_0 - a_0}{4^n a_n b_n} \leqslant \frac{b_0 - a_0}{4^n a_0^2}$$

car $a_0 < a_n < b_n$. D'où

$$q_n - p_n \leqslant \frac{b_0 - a_0}{4^n a_0^2} = \frac{\frac{2}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}}}{4^n \left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4^n}.$$

Les suites $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ étant adjacentes de limite $\frac{1}{\pi}$, on a

$$0 < a_n \leqslant \frac{1}{\pi} \leqslant b_n$$

d'où

$$p_n \leqslant \pi \leqslant q_n$$

puis

$$0 \leqslant \pi - p_n \leqslant q_n - p_n \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4^n}$$

(c) Pour tout entier naturel $n, p_n$ approche $\pi$ avec une erreur $\leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4^n}$ et par stricte croissance de ln,

$$\begin{aligned}\frac{3\sqrt{3}}{4^n} \leqslant 10^{-8} &\Longleftrightarrow \frac{3}{2}\ln(3) - 2n\ln(2) \leqslant -8\ln(10)\\ &\Longleftrightarrow n \geqslant \frac{\frac{3}{2}\ln(3) + 8\ln(10)}{2\ln(2)}\\ &\Longleftrightarrow n \geqslant n_0\end{aligned}$$

avec $n_0 = \left\lceil \frac{\frac{3}{2}\ln(3)+8\ln(10)}{2\ln(2)} \right\rceil$.

(d)
```
def EstimationPi(eps):
a,b = 3**(-3/2),2*3**(-3/2)
while 1/a-1/b > eps:
a = (a+b)/2
b = (a*b)**(1/2)
return 1/2*(1/a+1/b)
```