DS n°4.

Durée : 4 heures

L'évaluation se faisant principalement sur la qualité de la rédaction, vous soignerez la précision et la concision des arguments que vous avancerez au cours des démonstrations ainsi que la présentation de vos résultats en les encadrant ou les soulignant.
Vous n'oublierez pas de faire une marge à gauche sur chaque feuille, de bien inscrire le numéro des exercices ainsi que de numéroter vos copies avant de les rendre.

La calculatrice est interdite.

Question de cours

Rappeler la définition de "suites adjacentes" et prouver le théorème des suites adjacentes

Exercice 1 : divers

1. Soit u la suite définie pour tout entier n par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_1 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_{n+2} = 7u_{n+1} - 10u_n. \end{cases}$.
   Donner l'expression de u_n pour un entier n quelconque.

2. Soit
$$A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$$
   A admet-elle une borne supérieure ? Une borne inférieure (Réponses à justifier).
   Si elles existent, calculer ces bornes, et préciser s'il s'agit de maximum/ de minimum.

3. Determiner la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\frac{\sqrt{1-\cos(\frac{5}{n})}}{\ln(1+\frac{2}{\sqrt{n}})\sqrt{\sin(\frac{3}{n+1})}}$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer qu'il existe $(a_n, b_n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que
$$(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3} \quad \text{et} \quad 3b_n^2 = a_n^2 - 1.$$
   (b) Montrer que la partie entière de $(2+\sqrt{3})^n$ est un entier impair. *Indication : On pourra commencer par chercher un encadrement de $b_n\sqrt{3}$*

Exercice 2 : Résolution d'une EDL2 par changement de variable

On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :
$$x^2y" - 3xy' + 4y = 0. \ (E)$$

1. Expliquer pourquoi cette équation ne peut pas être résolue en utilisant un résultat du cours.
2. **Analyse.** Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $z(t) = y(e^t)$.
   (a) Montrer que z vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants que l'on précisera (on prendra bien soin de justifier chaque manipulation).
   (b) En déduire l'expression de y.
3. **Synthèse.** Vérifier que, réciproquement, les fonctions trouvées sont bien toutes les solutions de (E) et conclure.

Problème 1 : à propos des équations différentielles d'ordre 3.

On considère dans tout ce problème une équation différentielle linéaire d'ordre 3 à coefficients constants du type

$$(E) : y^{(3)} + ay'' + by' + cy = d(x)$$

(où $y^{(3)}$ désigne la dérivée troisième de y, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et d est une fonction continue sur $\mathbb{R}$).
Par analogie avec l'ordre 2 , on associera à (E) l'équation homogène $(H) : y^{(3)} + ay'' + by' + cy = 0$ ainsi que l'équation caractéristique

$$(E_c) : r^3 + ar^2 + br + c = 0.$$

A. Généralités.

1. On suppose que la fonction f est une solution particulière de l'équation (E). Montrer que y est solution de (E) si et seulement si $y - f$ est solution de (H).
2. On suppose dans cette question que le second membre est de la forme $d(x) = e^{kx}$, avec $k \in \mathbb{R}$. Montrer que, si k n'est pas solution de l'équation caractéristique (E_c), il existe une solution particulière de (E) de la forme $y_p(x) = Ae^{kx}$.
3. On suppose toujours $d(x) = e^{kx}$ mais cette fois, k est racine triple de l'équation caractéristique (E_c) (autrement dit, (E_c) peut se factoriser sous la forme $(r-k)^3 = 0$). Vérifier que $6k + 2a = 3k^2 + 2ak + b = k^3 + ak^2 + bk + c = 0$.
4. Montrer que, dans ce cas, l'équation (E) admet une solution particulière de la forme $y_p(x) = Ax^3e^{kx}$.
5. Montrer que le principe de superposition reste valable pour des équations linéaires à coefficients constants d'ordre 3.

B. Un cas particulier.

On s'intéresse dans cette partie à l'équation homogène $(H_1) : y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 0$.

1. Vérifier que la fonction $x \mapsto e^{-2x}\cos(x)$ est solution de (H_1).
2. Résoudre l'équation caractéristique associée à (H_1).
3. Montrer que, si r est racine de l'équation caractéristique précédente, alors la fonction $x \mapsto e^{rx}$ est solution de (H_1).
4. En déduire que toutes les fonctions de la forme $y_h : x \mapsto Ae^{-x} + Be^{-2x}\cos(x) + Ce^{-2x}\sin(x)$, avec $(A, B, C) \in \mathbb{R}^3$, sont solutions de (H_1).
5. On veut prouver la réciproque du résultat précédent. On considère une fonction y solution de H_1 et on pose
$$z = y'' + 4y' + 5y.$$
   (a) Montrer que z est solution de l'équation
   $$z' + z = 0.$$
   (b) Résoudre l'équation obtenue à la question précédente.
   (c) Résoudre l'équation $y'' + 4y' + 5y = \lambda e^{-x}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (d) En déduire la réciproque souhaitée (question à rédiger rigoureusement).
6. Déterminer l'unique solution y_0 de l'équation (H_1) vérifiant les conditions initiales
$$y_0(0) = 2,\ \ y_0'(0) = -2 \text{ et } y_0''(0) = -2.$$
7. Résoudre l'équation $y_0(x) = 0$.
8. Donner une allure de la courbe représentative de la fonction y_0 (sans chercher à la justifier).
9. Pour finir en beauté, résoudre entièrement l'équation différentielle $y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 34\,\mathrm{ch}(2x)$.

Problème 2 : Des suites

1. On désigne par $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de réels définie par la relation de récurrence

$$(A) \qquad \forall n\in\mathbb{N} \quad C_{n+1}=\sqrt{\frac{1+C_n}{2}}$$

et la donnée de son premier terme C_0 où $C_0\in[1,+\infty[$.

   (a) Déterminer le domaine de définition de la fonction $f : x\mapsto\sqrt{\frac{1+x}{2}}$ puis donner sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Justifier que pour tout $x\in[1,+\infty[$, on a $1\leqslant f(x)\leqslant x$.

   (b) Vérifier que l'intervalle $[1,+\infty[$ est stable par f.

   (c) Justifier que la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est correctement définie sur $\mathbb{N}$.

   (d) Que peut-on dire de la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $C_0=1$?

   (e) On suppose que $C_0>1$.

Démontrer que $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, que $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, puis que sa limite est égale à 1 .

2. On définit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs par les relations de récurrence

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad \begin{cases} a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n) \\ b_{n+1}=\sqrt{a_{n+1}b_n}\end{cases}$$

et la donnée de $(a_0,b_0)\in]0,+\infty[^2$. C'est bien $\sqrt{a_{n+1}b_n}$ et non $\sqrt{a_nb_n}$...

   (a) Justifier que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont correctement définies sur $\mathbb{N}$ et qu'elles sont strictement positives.

   (b) Étudier le cas $a_0=b_0$.
   Dans la suite on supposera que $a_0<b_0$.

   (c) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, a_n<b_n$. En déduire que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante puis que ces deux suites convergent vers un même réel strictement positif.

   (d) Que peut-on dire des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

3. On pose, pour tout entier naturel $n, \gamma_n=\frac{a_n}{b_n}$. Montrer que la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence (A) et que pour tout entier naturel n, on a $b_{n+1}=b_n\gamma_{n+1}$.

4. (a) Justifier rigoureusement l'existence d'un unique $\alpha\in]0,\frac{\pi}{2}[$ tel que $\gamma_0=\cos(\alpha)$.

   (b) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a

$$\gamma_n=\cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) \quad \text{et} \quad b_n=b_0\frac{\sin(\alpha)}{2^n\sin\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}.$$

   puis donner l'expression de a_n

   (c) Montrer que la limite commune aux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $b_0\frac{\sin(\alpha)}{\alpha}$.

5. Montrer que pour tout entier naturel $n, b_{n+1}^2-a_{n+1}^2=\frac{a_{n+1}}{2}(b_n-a_n)$. En déduire que pour tout entier naturel n,

$$b_{n+1}-a_{n+1}\leqslant\frac{1}{4}(b_n-a_n) \quad \text{puis} \quad b_n-a_n\leqslant\frac{1}{4^n}(b_0-a_0).$$

6. On prend $a_0=\frac{1}{3\sqrt{3}}, b_0=\frac{2}{3\sqrt{3}}$, et on pose pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$p_n=\frac{1}{b_n} \quad \text{et} \quad q_n=\frac{1}{a_n}$$

(a) Montrer que les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers π.

(b) Montrer, que pour tout entier naturel $n, 0 \leqslant q_n - p_n \leqslant \frac{1}{4^n} \times 3\sqrt{3}$, puis que $0 \leqslant \pi - p_n \leqslant \frac{1}{4^n} \times 3\sqrt{3}$.

(c) À partir de quel rang n_0 est-on assuré que p_n approche π à 10^{-8} près ?

(d) Écrire dans le langage de programmation de votre choix une fonction EstimationPi qui prend en argument un flottant eps strictement positif et qui renvoie une valeur approchée de π à eps près.