Colle 12 : Suites.

Proposition 1 Caractérisation séquentielle de la densité

A est dense dans $\mathbb{R}$ ssi tout réel est limite d'une suite d'éléments de A.

Proposition 2 Critère de convergence

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ ssi $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers ℓ.

Proposition 3 Théorème de Bolzano-Weierstrass

De toute suite bornée on peut extraire une suite convergente.

Proposition 4

$(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell\in\mathbb{C}$ ssi $(\operatorname{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\operatorname{Re}(\ell)$ et $(\operatorname{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\operatorname{Im}(\ell)$

Proposition 5 Théorème de Bolzano-Weierstrass (complexe)

De toute suite complexe bornée on peut extraire une suite convergente.

Proposition 6 Suites arithmetico-géométriques

Connaître la méthode : on cherche ℓ vérifiant $\ell = a\ell + b$ puis on introduit $v_n = u_n - \ell$: la nouvelle suite ainsi définie est géométrique de raison a

Proposition 7 Suite récurrentes linéaires d'ordre 2 complexe

Connaître la forme générale de l'expression de u_n dans les cas $\Delta = 0$ et $\Delta \neq 0$, donner l'une des deux preuves, au choix de l'interrogateur.

Proposition 8 Suite récurrentes linéaires d'ordre 2 réelles

Connaître la forme générale de l'expression de u_n dans les cas $\Delta = 0$ et $\Delta > 0$ et $\Delta < 0$. Donner la démonstration dans le cas $\Delta < 0$.

Proposition 9 Suites récurrentes définies par $u_{n+1} = f(u_n)$

Si $f(I)\subseteq I$, alors la suite est bien définie (avoir le justifier) et

- Si u converge, sa limite est nécessairement un point fixe de f
- Si f est croissante sur I alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

À savoir faire

- ☐ Pour une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$: chercher les points fixes de f, les intervalles stables par f, étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la convergence éventuelle de cette suite.
- ☐ Déterminer l'expression d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2
- ☐ Déterminer l'expression d'une suite arithmético-géométrique
- ☐ Déterminer la monotonie d'une suite, déterminer si une suite est bornée ou non, déterminer des limites de suites à l'aide du théorème d'encadrement, ou en montrant que deux suites sont adjacentes
- ☐ Déterminer si une relation binaire donnée sur un ensemble est ou non une relation d'ordre. Déterminer la borne supérieure ou inférieure d'un ensemble simple.
- ☐ Savoir calculer des parties entières, calculer des expressions faisant intervenir des parties entières, déterminer par exemple le rang à partir duquel $\frac{1}{n}$ devient inférieure à un nombre strictement positif ε donné.

Le programme officiel

Contenus	Capacités & commentaires
h) Suites complexes	
Brève extension des définitions et résultats précédents.	Caractérisation de la limite en termes de parties réelle et imaginaire.
Théorème de Bolzano-Weierstrass.	
i) Suites particulières	
Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques.	Pour une relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ où $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$, recherche d'une solution constante, détermination des solutions.
Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants.	
Présentation de l'étude des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ sur quelques exemples simples. Représentation géométrique. Si (u_n) converge vers un élément ℓ en lequel f est continue, alors $f(\ell) = \ell$.	Cette étude est l'occasion d'introduire la notion d'intervalle stable par une fonction. Pour l'étude de la monotonie de (u_n), on souligne l'intérêt, d'une part, de l'étude du signe de $f(x) - x$, et, d'autre part, de l'utilisation de la croissance éventuelle de f.
c) Relations de comparaison : cas des suites (Extrait du chapitre "Analyse asymptotique")	
Adaptation rapide aux suites des définitions et résultats relatifs aux fonctions.	Notations $u_n = O(v_n)$, $u_n = o(v_n)$, $u_n \sim v_n$.