Colle 11 : Ensembles des réels, suites.

Résultats et preuves à connaître

Proposition 1 Densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ et son complémentaire dans $\mathbb{R}$ sont denses dans $\mathbb{R}$

Définition 1

Connaître les défintions, avec des quantificateurs de : u est une suite bornée/majorée/minorée/périodique/stationnaire/croissante/décroissante/convergente.

Proposition 2 Théorème

Si u converge alors u est une suite bornée.

Proposition 3 Unicité de la limite

Si u converge vers ℓ alors ℓ est unique.

Proposition 4 Somme

Si u et v convergent vers 0 alors $u+v$ converge vers 0.

Proposition 5 Produit

Si u est bornée et v converge vers 0 alors uv converge vers 0.

Proposition 6 Théorèmes généraux

Si u converge vers ℓ et v converge vers ℓ' alors $u+v$ converge vers $\ell+\ell'$ et uv vers $\ell\ell'$.
On pourra utilser les résultats des propositions 4 et 5

Proposition 7 Lemme

Si v converge vers $\ell \neq 0$, alors à partir d'un certain rang on a $|v_n| \geq \frac{\ell}{2}$

Proposition 8 Limite d'un quotient

Si les suites u et v convergent respectivement vers ℓ et $\ell' \neq 0$ alors la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$ est définie à partir d'un certain rang et converge vers $\frac{\ell}{\ell'}$

Proposition 9 Théorème de convergence par encadrement

Si $u \leqslant v \leqslant w$ à partir d'un certain rang et u et w convergent vers une même limite ℓ alors v converge vers ℓ.

Proposition 10 Théorème de la limite monotone

• Toute suite réelle u croissante et majorée converge. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Toute suite réelle u croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.

• Toute suite réelle u décroissante et minorée converge. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Toute suite réelle u décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.

Énoncer les 2 résultats, démontrer le premier, on pourra utiliser (sans démonstration) $\sup(-A) = -\inf(A)$ pour le 2)

Proposition 11 Théorème des suites adjacentes

Si u et v sont adjacentes et u croissante alors
u et v convergent vers une même limite ℓ

Exercice 1 Sup(-A)

En notant $-A := \{-x, x \in A\}$ on a : si A admet une borne inférieure, alors $-A$ admet une borne supérieure et

$$\sup(-A) = -\inf(A)$$

À savoir faire

- ☐ Déterminer la monotonie d'une suite, déterminer si une suite est bornée ou non, déterminer des limites de suites à l'aide du théorème d'encadrement
- ☐ Déterminer si une relation binaire donnée sur un ensemble est ou non une relation d'ordre.
- ☐ Déterminer la borne supérieure ou inférieure d'un ensemble.
- ☐ Savoir calculer des parties entières, calculer des expressions faisant intervenir des parties entières, déterminer par exemple le rang à partir duquel $\frac{1}{n}$ devient inférieure à un nombre strictement positif ε donné.
- ☐ Résolution d'équations différentielles d'ordre 2 à coefficients constants, savoir trouver la forme générale des solutions réelles et des solutions complexes. Savoir trouver des solutions particulières avec des seconds membres de la forme $P(x)e^{\lambda x}$, ou des sommes de tels seconds membres. Résoudre des problèmes de Cauchy.

Le programme officiel

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Ensembles de nombres usuels- La fin	
Tout intervalle ouvert non vide rencontre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.	
c) Généralités sur les suites réelles	
Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone. Mode de définition d'une suite réelle : explicite, implicite, par récurrence.	Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $\left(\lvert u_n\rvert\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
d) Limite d'une suite réelle	
Limite finie ou infinie d'une suite. Unicité de la limite.	Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges. Notations $u_n \longrightarrow \ell$, $\lim u_n$.
Suite convergente, divergente. Toute suite convergente est bornée.	
Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.	Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle.
Passage à la limite d'une inégalité large. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell>0$, alors $u_n>0$ à partir d'un certain rang.	
Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$), par majoration (limite $-\infty$).	Utilisation d'une majoration de la forme $\lvert u_n-\ell\rvert \leqslant v_n$, où (v_n) converge vers 0.
e) Suites monotones	
Théorème de la limite monotone. Théorème des suites adjacentes.Sera vu en cours lundi	
g) Traduction séquentielle de certaines propriétés	
Partie dense de $\mathbb{R}$. Caractérisation séquentielle de la densité.	Une partie de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide. Densité de l'ensemble des décimaux, des rationnels, des irrationnels.
~~Si X est une partie non vide majorée (resp. non majorée) de $\mathbb{R}$, il existe une suite d'éléments de X de limite $\sup X$ (resp. $+\infty$).~~	~~Résultats analogues pour X non vide minorée (resp. non minorée).~~