Colle 10 : Équations différentielles-Borne sup/Borne inf

Preuves à connaître

Définition 1 Définitions

Connaître les définitions de : relation d'ordre, relation d'ordre totale, relation d'ordre partielle (être capable de donner un exemple pour chacun), ensemble ordonné, majorant, minorant, plus grand élément, plus petit élément.

Exercice 1 Ordre lexicographique

Montrer que $\mathbb{R}^2$ muni de l'ordre lexicographique est un ensemble totalement ordonné.

Proposition 1 Convexes de $\mathbb{R}$ (1))

- Définition Un ensemble A et dit convexe si et seulement si $\forall(x,y) \in A^2, x \leq y \Rightarrow [x,y] \subseteq A\}$
- Rappeler les 10 formes d'intervalles possibles et prouver, pour 3 d'entre elles, qu'il s'agit bien d'un ensemble convexe
- Réciproquement, si A est un convexe non-vide, il se décompose sous la forme $A = A^+ \bigcup A^-$ avec $A^+ = A \bigcap [a,+\infty[$ et $A^- = A \bigcap]-\infty, a]$, et expliquer les trois formes possibles de A^+ ainsi que les trois formes possible sde A^- (sans démonstration)

Proposition 2 Convexes de $\mathbb{R}$ (2)

Soit A un convexe non vide de $\mathbb{R}$ et A^+ tel que défini au-dessus, prouver que

- Si A^+ n'est pas majoré, alors $A^+ = [a,+\infty[$
- Sinon, A^+ est non vide majoré et admet un e borne supérieure qu'on note M
  - Si $M \notin A$ alors $A^+ = [a,M[$
  - Si $M \in A$ alors $A^+ = [a,M]$

Proposition 3 Caractérisation de la borne supérieure

$b = \sup(A) \iff \begin{cases} \forall x \in A, x \leqslant b \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, x > b - \varepsilon \end{cases}$ On part de la définition suivante : la borne supérieure est le plus petit des majorants.

Proposition 4 Conséquence 1 (Propriété de la borne inférieure sur $\mathbb{R}$)

Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide minorée admet une borne inférieure. À démontrer en admettant la propriété de la borne supérieure.

Proposition 5 Inclusions des ensembles de nombres réels

Énoncer les inclusions $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ en donnant à chaque fois des exemples pour prouver que ces inclusions sont strictes. Rappeler les définitions de $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$ et prouver les inclusions $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$

Définition 2 Partie entière

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists!\, n \in \mathbb{Z},\ n \leqslant x < n+1$$

n est appelé **partie entière** de x et est noté $\lfloor x \rfloor$. C'est le plus grand entier relatif inférieur à x.
On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1 \quad \text{et} \quad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$$

Proposition 6 Valeurs approchées par excès et défaut

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \exists!\, p_n \in \mathbb{Z},\ \frac{p_n}{10^n} \leqslant x < \frac{p_n + 1}{10^n}$$

À savoir faire

- ☐ Toutes les techniques de calcul d'intégrales (qui peuvent servir dans un exercice de résolution d'équation différenielle).
- ☐ Résolution d'équations différentielles linéaires d'ordre 1 avec second membre (méthode de variation de la constante)
- ☐ Résolution d'équations différentielles linéaires d'ordre 2 avec second membre de la forme $P(x)e^{\lambda x}$ (ou $P(x)e^{\lambda x}\cos(\omega x)$) : résoudre une équation avec un second memebre complexe puis prendre la partie réelle).
- ☐ Savoir montrer qu'une relation binaire est une relation d'ordre Pas d'autres exercices sur le chapitre borne sup/borne inf cette semaine.

Le programme officiel

Nombres réels et suites numériques

L'objectif de cette section est de donner une base solide à l'étude des suites réelles. On insiste sur le caractère fondamental de la propriété de la borne supérieure.

Dans l'étude des suites, on distingue nettement les aspects qualitatifs (monotonie, convergence, divergence) des aspects quantitatifs (majoration, encadrement, vitesse de convergence ou de divergence).

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Ensembles de nombres usuels	
Entiers naturels, relatifs, nombres décimaux, rationnels, réels, irrationnels. Approximations décimales d'un réel. ~~Tout intervalle ouvert non vide rencontre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$~~Pas encore vu. Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$.	Les constructions des ensembles de nombres usuels (et en particulier celle de $\mathbb{R}$) sont hors programme. Valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n} par défaut et par excès.
b) Propriété de la borne supérieure	
Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie de $\mathbb{R}$. Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure). Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tous a, $b \in X$ tels que $a \leqslant b$, $[a,b] \subset X$.	Notations $\sup X$, $\inf X$.