Colle 9 : Intégrales (fin) et équations différentielles (début).

Preuves à connaître

Proposition 1 Exemple de dérivation d'une fonction à valeurs complexes

Soit $\varphi : I \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable et $f = \exp(\varphi)$, définie sur I par $f(x) = \exp(\varphi(x))$.
Alors f est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, $f'(x) = \varphi'(x)\exp(\varphi(x))$.

Proposition 2 Exemple 2

Soit a un nombre complexe non réel. Calculer $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t-a}$.

Proposition 3 Structure de l'ensemble des solutions (ordre 1 & ordre 2)

La solution générale de

$$(E) \quad y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$$

est la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de l'équation homogène associée $y' + ay = 0$.
Même chose pour $(E) \quad ay'' + by' + cy = g(x)$ dans ce cas l'équation homogène associée est $ay'' + by' + cy = 0$.

Proposition 4 Solution générale de l'équation homogène

$y' + ay = 0 \iff \exists\lambda \in \mathbb{R}, y = \lambda e^{-A}$ avec A une primitive de a sur I.

Proposition 5 Problème de Cauchy

Étant donnés $t_0 \in I$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' + ay = b \\ y(t_0) = \alpha \end{cases}$$

Proposition 6 Solution générale de l'équation homogène (cas complexe)

Si a, b, c sont complexes et $a \neq 0$,

	Solutions de l'équation caractéristique	Solutions de l'équation homogène
$\Delta \neq 0$	λ_1 et λ_2 avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$\exists(A,B) \in \mathbb{C}^2, \forall t \in \mathbb{R}, y_H(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$
$\Delta = 0$	$\lambda_1 = -\dfrac{b}{2a}$	$\exists(A,B) \in \mathbb{C}^2, \forall t \in \mathbb{R}, y_H(t) = (At+B)e^{\lambda_1 t}$

L'élève doit donner l'énoncé et montrer qu'en considérant des fonctions sous la forme $y : x \mapsto z(x)e^{\lambda x}$, celles-ci sont solutions ssi z vérifie $az'' + (2a\lambda + b)z' = 0$ ou alors (au choix de l'interrogateur) repartir de cette égalité pour aboutir au résultat final

Proposition 7 Solution générale de l'équation homogène (cas réel)

Si a, b, c sont réels et $a \neq 0$,

	Solutions de l'équation caractéristique	Solutions de l'équation homogène
$\Delta > 0$	λ_1 et λ_2 avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, y_H(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$
$\Delta = 0$	$\lambda_1 = -\dfrac{b}{2a}$	$\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, y_H(t) = (At+B)e^{\lambda_1 t}$
$\Delta < 0$	$\lambda_1 = \alpha + i\omega$ et $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\omega > 0$	$\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R},$ $y_H(t) = e^{\alpha t}\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right)$

L'élève doit donner l'énoncé des 3 cas et démontrer l'un des 3 (au choix de l'interrogateur)

Proposition 8 Solution particulière pour un second membre exponentielle Sans démonstration

Une solution particulière de (E) : $ay'' + by' + cy = A(t)e^{\lambda t}$ où A est un polynôme de degré n sera de la forme :

- $y_p(t) = B(t)e^{\lambda t}$ où B est un polynôme de degré n si λ n'est pas solution de l'équation caractéristique.
- $y_p(t) = tB(t)e^{\lambda t}$ où B est un polynôme de degré n si λ est solution simple de l'équation caractéristique.
- $y_p(t) = t^2B(t)e^{\lambda t}$ où B est un polynôme de degré n si λ est solution double de l'équation caractéristique.

À savoir faire

- ☐ Résolution d'équations différentielles linéaires d'ordre 1 avec second membre (méthode de variation de la constante) : pas d'équations différentielles d'ordre 2 cette semaine.
- ☐ Savoir utiliser les règles de Bioche. Calculer des intégrales de fonctions à valeurs complexes.
- ☐ Calcul de primitives et d'intégrales utilisant des intégrations par parties, des changements de variables. Savoir intégrer des fractions rationnelles (avec une indication pour la décomposer en éléments simples)

Le programme officiel

B - Primitives et équations différentielles linéaires

Contenus	Capacités & commentaires
b) Équations différentielles linéaires du premier ordre	
Équation différentielle linéaire du premier ordre $$y' + a(x)y = b(x)$$ où a et b sont des fonctions réelles ou complexes définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Ensemble des solutions de l'équation homogène. Principe de superposition. Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée. Méthode de la variation de la constante. Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	Équation homogène associée. Cas particulier où la fonction a est constante.
c) Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants	
Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants $$y'' + ay' + by = f(x)$$ où a et b sont des scalaires et f est une fonction réelle ou complexe, définie et continue sur un intervalle.	Équation homogène associée.
Ensemble des solutions de l'équation homogène.	Si a et b sont réels, description des solutions réelles.
Principe de superposition. Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.	Les étudiants doivent savoir déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre polynôme, de la forme $x \mapsto A\,e^{\lambda x}$ avec $(A, \lambda) \in \mathbb{C}^2$, $x \mapsto B\cos(\omega x)$ et $x \mapsto B\sin(\omega x)$ avec $(B, \omega) \in \mathbb{R}^2$.
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	La démonstration de ce résultat est hors programme.