Colle 8 : Fonctions trigonométriques réciproques et intégrales.

Preuves à connaître

Proposition 1 Fonction arctangente

Donner la définition et la dérivée (à savoir retrouver à partir du théorème de dérivation d'une fonction réciproque). Donner le tableau de variation et le graphe (à représenter avec le graphe de la fonction tangente).

Proposition 2 Propriété

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Proposition 3 Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ alors

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

Proposition 4 Changement de variables

Soit f continue sur I un intervalle de $\mathbb{R}$ et φ de classe $\mathscr{C}^1$ sur J telle que $\varphi(J) \subset I$. Alors

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u$$

Proposition 5 Intégrale et parité

Soit $a > 0$ et f continue sur $[-a,a]$.

Si f est paire alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$ et si f est impaire alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$

Proposition 6 Intégrale et périodicité

Soit $T > 0$ et f continue et T-périodique. Alors

- $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\displaystyle\int_{a+T}^{b+T} f = \int_a^b f$ (invariance par translation)
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_x^{x+T} f = \int_0^T f$ (intégrale sur une période)

Exercice 1 Intégrales de Wallis -1

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.

Exprimer I_{n+2} en fonction de I_n.

Exercice 2 Intégrales de Wallis -2

Montrer, en utilisant la relation de récurrence $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ que $\forall n \in \mathbb{N},\ , I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\,\dfrac{\pi}{2}$.

Proposition 7 Formulaire pour intégrer des éléments simples

$$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t-a} = \ln|x-a| + \lambda$$

$$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^n} = \frac{\text{Cte}}{(x-a)^{n-1}} + \lambda \quad (n \geqslant 2)$$

$$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\,\text{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right) + \lambda \quad (a \neq 0)$$

$$\int^x \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+a^2\right) + \lambda$$

$$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^n} \quad (n \geqslant 2) \quad \text{on pose } t = a\tan\theta \quad \text{soit} \quad \theta = \text{Arctan}\,\frac{t}{a}$$

On ne demandera que le changement de variable à poser mais pas de poursuivre les calculs

$$\int^x \frac{t\,\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^n} = \frac{\text{Cte}}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \lambda \quad (n \geqslant 2)$$

Exercice 3 Élément simple de seconde espèce d'ordre 4

Calculer $\int^x \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^4}$ en posant $t = \tan\theta$ puis linéariser $\cos^6$ pour conclure.

Exercice 4 Règle de Bioche

Trouver une primitive de la fonction $\frac{1}{\sin}$ et préciser l'intervalle de validité.

Exercice 5 Règle de Bioche 2

Calculer $\int^x \frac{\mathrm{d}t}{2-\cos^2 t}$ (on précisera aussi l'intervalle de validité)

À savoir faire

- ☐ Tous les exercices avec les fonctions trigonométriques et trigonométriques réciproques
- ☐ Déterminer si une fonction donnée est injective, surjective ou bijective. Déterminer la réciproque lorsqu'elle est bijective.
- ☐ Calculer des intégrales et des primitives simples, n'utilisant que des intégrations par parties ou la reconnaissance de la dérivée d'une fonction particulière (connaître les primitives des fonctions de référence)

Le programme officiel

B - Primitives et équations différentielles linéaires

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Calcul de primitives	
Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes. Lien entre intégrales et primitives.	Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles. On rappelle sans démonstration que, pour une fonction continue f, $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ a pour dérivée f. On pourra noter $\int^{x} f(t)\,dt$ une primitive générique de f.
Calcul des primitives, application au calcul d'intégrales.	Primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$, application aux primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$.
Primitives des fonctions exponentielle, logarithme, puissances, trigonométriques et hyperboliques, et des fonctions $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.	Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$ et reconnaître les dérivées de fonctions composées.
Intégration par parties, changement de variable.	Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.