Correction du DS n°3.

Question de cours

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $(b,c) \in \mathbb{R}^2$, on suppose que $b^4 - 4ac < 0$. Quel est l'ensemble des solutions de l'équation-différentielle

$$ay'' + by' + cy = 0. \qquad (E)$$

d'inconnue y, fonctions à valeurs réelles ? Démontrez le résultat (les résultats sur les équations différentielles complexes peuvent être rappelés sans démonstration.)

Analyse Soit y une solution réelle de l'équation différentielle, alors comme $\Delta < 0$ l'EC admet deux racines complexes conjuguées $\frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \alpha \pm i\omega$ (avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$) et il existe donc deux constantes A et B complexes telles que pour tout x réel, on ait

$$y(x) = Ae^{(\alpha+i\omega)x} + Be^{(\alpha-i\omega)x} = e^{\alpha x}\left(Ae^{i\omega x} + Be^{-i\omega x}\right)$$

Comme y est à valeurs réelles, on a $y(x) = Re(y(x)) = e^{\alpha x} Re(Ae^{i\omega x} + Be^{-i\omega x})$ or $Re(Ae^{i\omega x} + Be^{-i\omega x}) = (Re(A) + Re(B))\cos(\omega x) + (-Im(A) + Im(B))\sin(\omega x) = \lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x)$avec λ et μ deux constantes réelles.

Synthèse S'il existe λ et μ deux constantes réelles telles que $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = e^{\alpha x}\lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x)$ alors y est bien une fonction à valeurs réelles, et de plus on $y(x) = \lambda e^{\alpha x}\frac{e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}}{2} + \mu e^{\alpha x}\frac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{2i} = (\frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{2i})e^{(\alpha+i\omega)x} + (\frac{\lambda}{2} - \frac{\mu}{2i})e^{(\alpha-i\omega)x}$ qui est donc bien une solution de l'EDL2 considérée.

Exercice 1 : calculs d'intégrales

1. Sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\sin(x) \geqslant 0$ et $\cos(x) \geqslant 0$ donc $1 + \sin(x)\cos(x) > 0$. Par conséquent, $x \mapsto \dfrac{1}{1+\sin(x)\cos(x)}$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ d'après les théorèmes généraux. I est alors bien définie.

   On pose $u = \tan(x) \in \mathscr{C}^1\left(\left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right)$ donc $\dfrac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \mathrm{d}x$.

   $$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\tan(x)\cos^2(x)} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\frac{\tan(x)}{1+\tan^2(x)}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}\frac{1}{1+\frac{u}{1+u^2}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u+u^2} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$
   $$= \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(u+\frac{1}{2})\right)\right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\mathrm{Arctan}\sqrt{3} - \mathrm{Arctan}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$$

   Finalement, on obtient $\boxed{I = \dfrac{\pi\sqrt{3}}{9}}$

2. Sur $[0,2]$, $x+1 > 0$ donc $x \mapsto \dfrac{x}{(x+4)\sqrt{x+1}}$ est continue sur $[0,2]$ et J est bien définie.

   On pose $u = \sqrt{x+1} \in \mathscr{C}^1([0,2])$ donc $u^2 = x+1$ soit $2u\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$.

   $$J = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2u\,\mathrm{d}u}{(u^2-1+4)u} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2\,\mathrm{d}u}{u^2+3} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\frac{u}{\sqrt{3}}\right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \quad \text{donc } \boxed{J = \frac{\pi\sqrt{3}}{18}}$$

3. Sur $[0,1]$, $(x+1)^2>0$ donc $x \mapsto \dfrac{\text{Arctan}\,(x)}{(x+1)^2}$ est continue sur $[0,1]$ et K est bien définie.
On pose $\begin{cases} u(x)=\text{Arctan}\,(x) & u'(x)=\frac{1}{1+x^2} \\ v'(x)=\frac{1}{(x+1)^2} & v(x)=-\frac{1}{x+1}\end{cases}$ u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$.
$K=\left[-\dfrac{\text{Arctan}\,(x)}{x+1}\right]_0^1+\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x+1)}=-\frac{\pi}{8}+\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x+1)}$
Posons $f(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)(x+1)}$. On a alors $f(x)=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{bx+c}{x^2+1}$.
• $a=[(1+x)f(x)](-1)=\dfrac{1}{2}$
• $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=0=a+b$ donc $b=-\dfrac{1}{2}$
• $f(0)=1=a+c$ donc $c=\dfrac{1}{2}$.
Finalement $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}+\frac{-x+1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x+1}-\frac{1}{4}\int_0^1\frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$
$=\dfrac{1}{2}\left[\ln|x+1|\right]_0^1-\dfrac{1}{4}\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1+\dfrac{1}{2}\left[\text{Arctan}\,(x)\right]_0^1=\dfrac{1}{4}\ln(2)+\dfrac{\pi}{8}$.
On obtient donc $\boxed{K=\dfrac{\ln(2)}{4}}$

Exercice 2 : complexes et surjectivité/injectivité

1. $f(z)$ existe si et seulement si $z\neq 2i$ donc $\boxed{D=\mathbb{C}\backslash\{2i\}}$.

2. (a) On résout l'équation $(x+iy)^2=8-6i$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On obtient le système suivant :
$$\begin{cases} x^2-y^2=8 & L_1 \\ 2xy=-6 & L_2 \\ x^2+y^2=\sqrt{8^2+6^2}=10 & L_3\end{cases} \iff \begin{cases} x^2=9 & L_1\leftarrow(1/2)(L_1+L_3) \\ 2xy=-6 & L_2\leftarrow(1/2)L_2 \\ y^2=1 & L_3\leftarrow(1/2)(L_3-L_1)\end{cases}$$
$\iff x+iy=3-i$ ou $x+iy=-3+i$ car $L_2\implies x$ et y sont de signe contraire.

   (b) On résout l'équation $f(z)=1+i\iff\dfrac{z^2}{z-2i}=1+i\iff z^2-(1+i)z-2+2i=0$
$\Delta=(1+i)^2-4(-2+2i)=8-6i=(3-i)^2$ d'après la question précédente.
On en déduit que $z=\dfrac{(1+i)-(3-i)}{2}=-1+i$ ou $z=\dfrac{(1+i)+(3-i)}{2}=2$.
Conclusion : $\boxed{\text{Les antécédents de } 1+i \text{ par } f \text{ sont } 2 \text{ et } -1+i}$.

3. On résout l'équation $f(z)=h\iff\dfrac{z^2}{z-2i}=h\iff z^2-hz+2ih=0$.
On a $\Delta=h^2-8ih$.
Si $\Delta=0\iff h=0$ ou $h=8i$, l'équation admet une unique solution complexe.
Si $\Delta\neq 0$, l'équation admet deux solutions complexes distinctes.

4. De la question précédente, on en déduit que $\forall h\in\mathbb{C},\exists z\in D, f(z)=h$ i.e. tout complexe admet au moins un antécédent par f dans D.
Donc $\boxed{f(D)=\mathbb{C} \text{ et } f \text{ est surjective de } D \text{ dans } \mathbb{C}}$.

5. Comme $f(2)=f(-1+i)=1+i$ d'après 2 (b), on en déduit que $\boxed{f \text{ n'est pas injective sur } D}$.

Exercice 3 : fonction arctangente

1. • $8 > 5 > 2 > \sqrt{3}$ (car $4 > 3$) donc $\text{Arctan}\,(2) + \text{Arctan}\,(5) + \text{Arctan}\,(8) > 3\,\text{Arctan}\,\sqrt{3} = 3 \times \dfrac{\pi}{3} = \pi$

   De plus, $\text{Arctan} < \dfrac{\pi}{2}$ donc $\text{Arctan}\,(2) + \text{Arctan}\,(5) + \text{Arctan}\,(8) < \dfrac{3\pi}{2}$

   Conclusion : $\boxed{\pi < A < \dfrac{3\pi}{2}}$

   • $\tan A = \dfrac{2 + \tan(\,\text{Arctan}\,(5) + \text{Arctan}\,(8))}{1 - 2\tan(\,\text{Arctan}\,(5) + \text{Arctan}\,(8))} = \dfrac{2 + \frac{5+8}{1-5\times 8}}{1 - 2 \times \frac{5+8}{1-5\times 8}} = 1 = \tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ donc $\exists k \in \mathbb{Z}, A = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$

   Or $\pi < A < \dfrac{3\pi}{2}$ soit $\pi < \dfrac{\pi}{4} + k\pi < \dfrac{3\pi}{2} \iff \dfrac{3}{4} < k < \dfrac{5}{4}$. Comme $k \in \mathbb{Z}$, $k = 1$ et donc $\boxed{A = \dfrac{5\pi}{4}}$

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \text{Arctan}\,(x-3) + \text{Arctan}\,(x) + \text{Arctan}\,(x+3)$.
   f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, comme composée et somme de fonctions strictement croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, c'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\left]\lim\limits_{-\infty} f, \lim\limits_{+\infty} f\right[= \left]-\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$.

   Comme $\dfrac{5\pi}{4} \in \left]-\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$, l'équation $f(x) = \dfrac{5\pi}{4}$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. De plus, d'après la question précédente $f(5) = \dfrac{5\pi}{4}$.

   Conclusion : $\boxed{\text{Arctan}\,(x-3) + \text{Arctan}\,(x) + \text{Arctan}\,(x+3) = \dfrac{5\pi}{4} \iff x = 5}$

Exercice 4 : Réciproque de la tangente hyperbolique

1. th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $th'(x) = \frac{1}{\text{ch}^2(x)} > 0$ donc th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

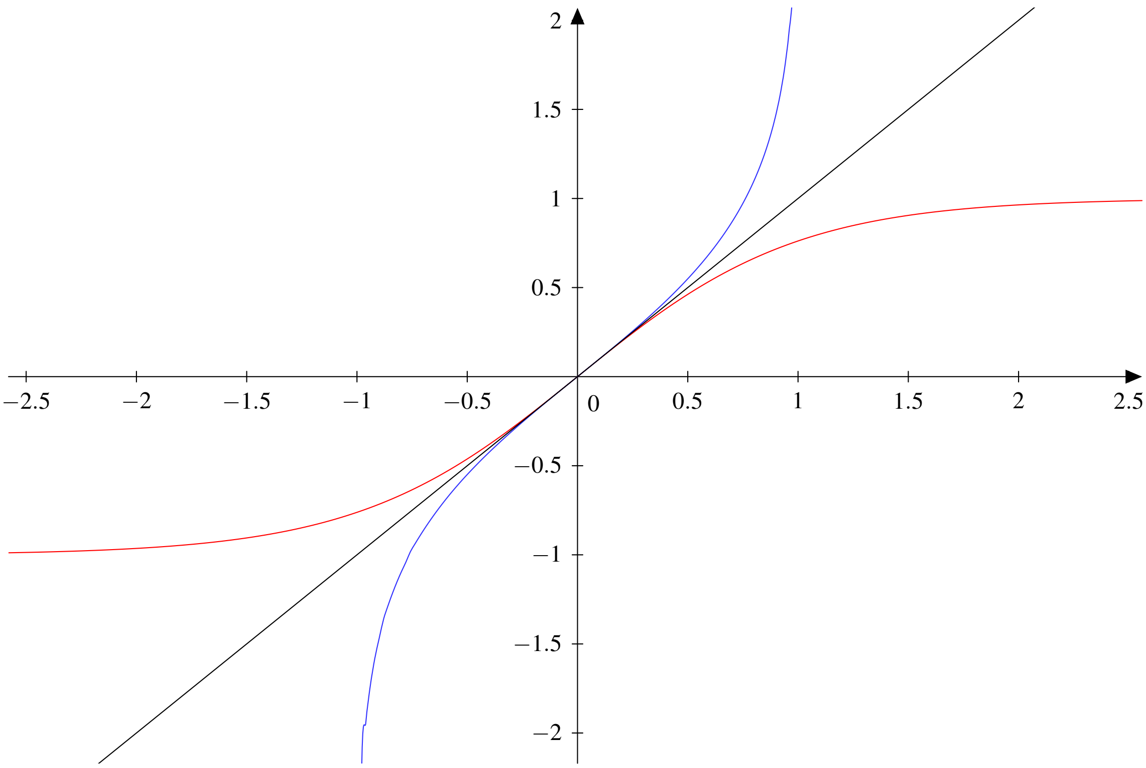
2.
   - th est définie sur $\mathbb{R}$ qui est un intervalle
   - th y est strictement croissante
   - th est continue

   donc d'après le théroème de la bijection, $th(\mathbb{R})$ est un intervalle, en l'occurence comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty} th(x) = \pm 1$ on a $th(\mathbb{R}) =]-1,1[$ et th réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1,1[$.

3. Sa réciproque argth est donc définie sur $]-1,1[$ (et elle y est continue)

4. On a $th' > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème de dérivation d'une fonction réciproque, sa fonction réciproque argth est donc dérivable sur $th(\mathbb{R})$ i.e. sur $]-1,1[$. De plus on a $\forall x \in]-1,1[$, $\text{Argth}'(x)\frac{1}{th'(\,\text{Argth}\,(x))} = \frac{1}{1 - th^2(\,\text{Argth}\,(x))} = \frac{1}{1-x^2}$

5. On en déduit que argth est strictement croissante sur $]-1,1[$, et par symétrie de son graphe avec celui de th par rapport à la droite d'équation $y = x$, les asymptotes horizontales d'équations $y = 1$ et $y = -1$ pour le graphe de th deviennnent des asymptotes verticales d'équation $x = 1$ et $x = -1$ pour le graphe de argth.



(en rouge : th et en bleu : argth)

6. $th(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y \Leftrightarrow \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = y \Leftrightarrow e^2x - 1 = y(e^{2x}+1) \Leftrightarrow e^{2x}(1-y) = 1+y \Leftrightarrow e^{2x} = \frac{1+y}{1-y}$ ce qui peut avoir une solution (si $\frac{1+y}{1-y} > 0$) ou 0 sinon. Un tableau de signe permet de s'apercevoir que la première condition est vérifiée uniquement si $x \in]-1,1[$: pour les autres valeurs de y il n'y a donc aucune solution, et si $y \in]-1,1[$ l'unique solution sera alors $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$

7. On a donc $\forall y \in]-1,1[, argth(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$

8. En tant que composées defonctions dérivables, la fonction précédente est dérivable sur $]-1,1[$ et sa dérivée vaut $\frac{1}{2}\frac{\frac{1-y+1+y}{(1-y)^2}}{\frac{1+y}{1-y}} = \frac{\frac{1}{(1-y)^2}}{\frac{1+y}{1-y}} = \frac{1}{(1+y)(1-y)} = \frac{1}{1-y^2}$

9. Avec la méthode de multiplication par $x+1$ et évaluation en -1 on trouve $a = -\frac{1}{2}$ et multiplication par $x-1$ et évaluation en 1, $b = \frac{1}{2}$

10. Sur l'intervalle $]-1,1[$ ou sur $]1,+\infty[$ ou sur $]-\infty,-1[$ on a $\int^x \frac{1}{x^2-1}dx = \int^x \left(\frac{\frac{-1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1}\right)dx$
$= \frac{1}{2}(\ln(x-1) - \ln(x+1)) + Cste = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + Cste$, comme on a $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ on or on avait vu que $argth'(x) = \frac{1}{1-x^2}$ donc tout ceci est bien cohérent

Exercice 5 : Géométrie avec des complexes

1. $\arg(z') = \arg\left(-\dfrac{1}{\bar{z}}\right) \equiv \pi + \arg\left(\dfrac{1}{\bar{z}}\right)[2\pi] \equiv \pi - \arg(\bar{z})[2\pi]$ donc $\boxed{\arg(z') \equiv \pi + \arg(z)[2\pi]}$

   On en déduit que $\arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) \equiv \pi[2\pi] \iff \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) \equiv \pi[2\pi]$ donc $\boxed{O \in]MM'[}$

2. $z'+1 = -\dfrac{1}{\bar{z}} + 1 = \dfrac{-1+\bar{z}}{\bar{z}}$ d'où $\boxed{\overline{z'+1} = \dfrac{z-1}{z}}$

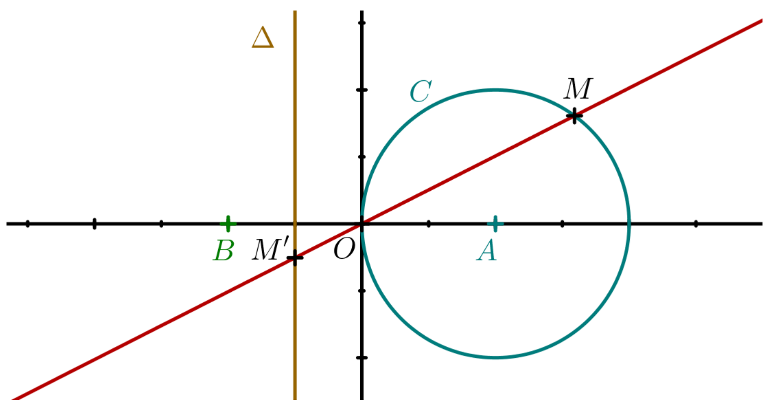
3. (a) $M \in \mathcal{C}$ donc $AM = 1$ soit $\boxed{|z-1| = 1}$

   (b) $|z'+1| = \left|\dfrac{z-1}{z}\right| = \dfrac{|z-1|}{|z|} = \dfrac{1}{|z|}$ et $|z'| = \left|-\dfrac{1}{\bar{z}}\right| = \dfrac{1}{|\bar{z}|} = \dfrac{1}{|z|}$ donc $\boxed{|z'+1| = |z'|}$

   $|z'+1| = |z'| \iff BM' = OM' \iff$ $\boxed{M' \text{ appartient à la médiatrice de } [OB]}$

   (c) <u>Construction</u>

   D'après 1, $M' \in (OM)$ et, d'après 3.b, M' appartient à la médiatrice (Δ) de $[OB]$. Donc M' est le point d'intersection de (OM) et (Δ).



Exercice 6 : Fonction Arcsinus

1. $\sqrt{\dfrac{x+a}{b}} \leqslant 1 \Longleftrightarrow 0 \leqslant \dfrac{x+a}{b} \leqslant 1 \Longleftrightarrow 0 \leqslant x+a \leqslant b \Longleftrightarrow \boxed{-a \leqslant x \leqslant b-a}$.

2. f est définie ssi $\sqrt{\dfrac{x+a}{b}} \leqslant 1$ et $\sqrt{\dfrac{x-a}{b}} \leqslant 1$ ssi $-a \leqslant x \leqslant b-a$ et $a \leqslant x \leqslant b+a$ d'après 1.
   Or $b > 2a$ donc $b-a > a$ d'où $-a \leqslant a < b-a \leqslant b+a$. On obtient finalement que $\boxed{f \text{ est définie sur } [a, b-a]}$.

3. Comme les fonctions racine carrée et arcsinus sont strictement croissantes sur leurs ensembles de définition, on en déduit que $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } [a, b-a]}$.
   De plus f est continue sur $[a, b-a]$, c'est donc une bijection de $[a, b-a]$ dans $[f(a), f(b-a)]$.
   Or $[f(a), f(b-a)] = \left[\operatorname{Arcsin}\sqrt{\dfrac{2a}{b}}, \dfrac{\pi}{2} + \operatorname{Arcsin}\sqrt{\dfrac{b-2a}{b}}\right]$.
   Comme $0 \leqslant \dfrac{2a}{b} < 1$ d'où $\operatorname{Arcsin}\sqrt{\dfrac{2a}{b}} < \dfrac{\pi}{2}$. De même $b-2a > 0$ donc $\operatorname{Arcsin}\sqrt{\dfrac{b-2a}{b}} > 0$.
   On en déduit donc que $\dfrac{\pi}{2} \in \left[\operatorname{Arcsin}\sqrt{\dfrac{2a}{b}}, \dfrac{\pi}{2} + \operatorname{Arcsin}\sqrt{\dfrac{b-2a}{b}}\right]$ et d'après le théorème de la bijection que
   $\boxed{\text{l'équation } f(x) = \dfrac{\pi}{2} \text{ admet une unique solution}}$.

4. $\sin^2(\alpha) + \sin^2(\beta) = \sin^2\alpha + \sin^2\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)$ donc $\boxed{\sin^2(\alpha) + \sin^2(\beta) = 1}$

5. $x_{a,b}$ est défini par : $\operatorname{Arcsin}\sqrt{\dfrac{x_{a,b}+a}{b}} + \operatorname{Arcsin}\sqrt{\dfrac{x_{a,b}-a}{b}} = \dfrac{\pi}{2}$.
   D'après la question précédente, on a alors $\sin^2\left(\operatorname{Arcsin}\sqrt{\dfrac{x_{a,b}+a}{b}}\right) + \sin^2\left(\operatorname{Arcsin}\sqrt{\dfrac{x_{a,b}-a}{b}}\right) = 1$
   soit $\dfrac{x_{a,b}+a}{b} + \dfrac{x_{a,b}-a}{b} = 1$ d'où $\boxed{x_{a,b} = \dfrac{b}{2}}$: On remarque que $x_{a,b}$ ne dépend pas de a.