# DS n°3.

## Durée : 4 heures

**L'évaluation se faisant principalement sur la qualité de la rédaction, vous soignerez la précision et la concision des arguments que vous avancerez au cours des démonstrations ainsi que la présentation de vos résultats en les encadrant ou les soulignant.**
**Vous n'oublierez pas de faire une marge à gauche sur chaque feuille, de bien inscrire le numéro des exercices ainsi que de numéroter vos copies avant de les rendre.**

**La calculatrice est interdite.**

### Question de cours

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $(b,c) \in \mathbb{R}^2$, on suppose que $b^4 - 4ac < 0$. Quel est l'ensemble des solutions de l'équation-différentielle

$$ay'' + by' + cy = 0. \qquad (E)$$

d'inconnue $y$, fonctions à valeurs réelles ? Démontrez le résultat (les résultats sur les équations différentielles complexes peuvent être rappelés sans démonstration.)

### Exercice 1 : calculs d'intégrales

Calculer les intégrales suivantes

1. $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin(x)\cos(x)}$
2. $J = \displaystyle\int_0^{2} \frac{\mathrm{d}x}{(x+4)\sqrt{x+1}}$
3. $K = \displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{Arctan}\,(x)}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

### Exercice 2 : complexes et surjectivité/injectivité

Soit $f$ la fonction qui, à un complexe $z$, associe $f(z) = \dfrac{z^2}{z-2i}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de $f$, que l'on notera $D$.
2. (a) Déterminer les racines carrées de $8-6i$.
   (b) En déduire les antécédents de $1+i$ par $f$
3. Soit $h$ un complexe. Discuter suivant les valeurs de $h$ le nombres d'antécédents $h$ par $f$.
4. Déterminer $f(D)$. La fonction $f$ est-elle surjective de $D$ dans $\mathbb{C}$ ?
5. $f$ est-elle injective sur $D$ ?

## Exercice 3 : fonction arctangente

Soit $A = \operatorname{Arctan}(2) + \operatorname{Arctan}(5) + \operatorname{Arctan}(8)$.

1. Montrer que $\pi < A < \dfrac{3\pi}{2}$, puis calculer explicitement $A$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$(E) \quad \operatorname{Arctan}(x-3) + \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(x+3) = \frac{5\pi}{4}$$

## Exercice 4 : Réciproque de la tangente hyperbolique

1. La fonction $th$ est-elle strictement monotone sur $\mathbb{R}$ ?
2. Appliquer le théorème de la bijection (énoncé et conclusion) puis conclure que la fonction $th$ admet une réciproque que l'on notera argth.
3. Donner l'ensemble de définition de argth
4. Sur quel ensemble argth est-elle dérivable ? Donner alors l'expression de sa dérivée, que l'on simplifiera *(on citera le théorème utilisé ainsi que ses hypothèses)*
5. Tracer sur un même graphique les graphes des fonctions $th$ et argth
6. Soit $y \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $th(x) = y$ en exprimant la/les solution(s) (s'il y en a) à l'aide des fonctions usuelles.
7. Pour $y$ appartenant au domaine de définition de argth, donner l'expression de $\operatorname{argth}(y)$ uniquement à l'aide des fonctions usuelles.
8. À partir de cette expression, retrouver la formule de la dérivée trouvée à la question (4).
9. Trouver deux réels $a$ et $b$ tels que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$ on ait $\frac{1}{x^2-1} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}$
10. Déduire de la question précédente une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$, en précisant les intervalles de validité. En quoi cela permet-il de confirmer l'une des réponse aux questions précédentes ?

## Exercice 5 : Géométrie avec des complexes

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$. A tout point $M$ d'affixe $z \neq 0$, on associe le point $M'$ d'affixe

$$z' = -\frac{1}{\bar{z}}$$

Soient $A$ et $B$ les points d'affixes respectives 1 et $-1$. On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre $A$ passant par $O$.

1. Exprimer $\arg(z')$ en fonction de $\arg(z)$. Interpréter géométriquement cette égalité.

2. Démontrer que $\overline{z'+1} = \dfrac{z-1}{z}$.

3. On suppose que $M$ appartient au cercle $C$ privé de $O$

   (a) Justifier que $|z-1| = 1$.

   (b) Démontrer que $|z'+1| = |z'|$. Interpréter géométriquement cette égalité.

   (c) En déduire une construction géométrique du point $M'$ connaissant le point $M$. Faire une figure.

## Exercice 6 : Fonction Arcsinus

Soient $a$ et $b$ deux réels positifs tels que $b > 2a$. On définit la fonction $f$ par

$$f(x) = \text{Arcsin}\sqrt{\frac{x+a}{b}} + \text{Arcsin}\sqrt{\frac{x-a}{b}}$$

(a) Résoudre l'inéquation $\sqrt{\dfrac{x+a}{b}} \leqslant 1$.

(b) Déterminer l'ensemble de définition de $f$.

(c) Déterminer les variations de $f$ puis en déduire que l'équation $f(x) = \dfrac{\pi}{2}$ admet une unique solution que l'on notera $x_{a,b}$.

(d) Soient $\alpha$ et $\beta$ deux réels tels que $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$, montrer que $\sin^2(\alpha) + \sin^2(\beta) = 1$.

(e) En déduire $x_{a,b}$.