Colle 7 : Fonctions & Fonctions trigonométriques réciproques.

Preuves à connaître

Définition 1 Injection et surjection

Soit $f : E \to F$.
f est injective $\Leftrightarrow \left(\forall (x,y) \in E^2, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y\right) \quad \Leftrightarrow (\forall y \in F,\ \ y$ admet au plus un antécédent par $f)$
f est surjective $\Leftrightarrow (\forall y \in F, \exists x \in E / f(x) = y) \Leftrightarrow (\forall y \in F, y$ admet au moins un antécédent par $f) \Leftrightarrow Im(f) = F$
Donner un exemple de fonction injective, de fonction non-injective, de fonction surjective, de fonction non-surjective.

Proposition 1 Composition et surjections

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Alors

- Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
- Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Définition 2 Caractérisation de l'application réciproque

f est bijective de E dans F si et seulement s'il existe $g \in \mathscr{F}(F,E)$ qui vérifie

$$f \circ g = \mathrm{Id}_F \quad \text{et} \quad g \circ f = \mathrm{Id}_E$$

g est unique, on l'appelle **l'application réciproque** de f et on la note f^{-1}.

Proposition 2 Compositions et bijections

- Si f est bijective de E dans F alors f^{-1} est bijective de F dans E et $(f^{-1})^{-1} = f$.
- Si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Proposition 3 Théorème de la bijection [on ne démontrera que les 2e et 4e points]

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction **continue** et **strictement monotone** sur I alors

- $\mathrm{Im}\,(f) = f(I) = J$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
- Pour tout $m \in J$, l'équation $f(x) = m$ admet une unique solution dans I. Autrement dit, f est une bijection de I dans J.
- f admet une application réciproque qui est continue sur J.
- $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (première bissectrice).

Proposition 4 Théorème : Dérivation d'une fonction réciproque

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I dont **la dérivée ne s'annule pas sur** I alors

- f est bijective de I dans l'intervalle $J = f(I)$.
- f^{-1} est dérivable sur J et pour tout $x \in J$, $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

  Le 1er point doit être prouvé et l'expression de la dérivée doit être retrouvée en admettant la dérivabilité de f^{-1} et en dérivant $f \circ f^{-1}$

Proposition 5 Propriétés des fonctions indicatrices

- $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$
- $\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A$
- $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$
- $\mathbb{1}_{A\setminus B} = \mathbb{1}_A(1 - \mathbb{1}_B)$
- $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.

Proposition 6 Inclusion et indicatrice

Soit $(A,B) \in \mathscr{P}^2(E)$.

$$A \subset B \iff \mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B$$

Proposition 7 Fonction arccosinus

Donner la définition, valeurs remarquables ($0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1$ et leurs opposés) et dérivée (à savoir retrouver à partir du théorème de dérivation d'une fonction réciproque du lemme). Donner le tableau de variation et le graphe (à représenter avec le graphe de la fonction cosinus)

Proposition 8 Fonction arcsinus

Même question, mais avec arcsinus

Proposition 9 Composées

- $\sin \circ \operatorname{Arcsin} = \cos \circ \operatorname{Arccos} = id_{[-1;1]}$
- $\operatorname{Arccos} \circ \cos$ est définie sur $\mathbb{R}$, mais seulement sa restriction à $[0,\pi]$ vaut l'identité, elle est par ailleurs paire (ce qui permet d'obtenir son graphe sur $[-\pi;0]$ et 2π-périodique (ce qui permet de l'obtenir sur $\mathbb{R}$)) donner le graphe de $\operatorname{Arccos} \circ \cos$
- $\operatorname{Arcsin} \circ \sin$ est définie sur $\mathbb{R}$, mais seulement sa restriction à $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ vaut l'identité, et $\forall \theta \in [\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}]$ on a $\operatorname{Arcsin} \circ \sin(\theta) = \pi - \theta$. Par 2π-périodicité, on peut ensuite donner le graphe de $\operatorname{Arcsin} \circ \sin$

Proposition 10 Lemme

$\forall x \in [-1,1]$,

$$\cos(\operatorname{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2} \text{ et } \sin(\operatorname{Arccos}(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$

À savoir faire

- ☐ Déterminer une image directe (tableau de variation, utiliser le TVI)
- ☐ Déterminer une image réciproque (tableau de variation)
- ☐ Déterminer si une fonction donnée est injective, surjective ou bijective.
- ☐ Déterminer la réciproque lorsqu'elle est bijective.
- ☐ Exercices avec les fonctions indicatrices
- ☐ Retrouver des arcsinus de la forme $\mathrm{Arcsin}(\sin(\frac{107\pi}{4}))$ ou des arccosinus de la même forme.

Le programme officiel

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
c) Applications et relations (de "Raisonnement et vocabulaire ensembliste")	
Application d'un ensemble dans un ensemble. Graphe d'une application.	Le point de vue est intuitif : une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F. Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application. Notations $\mathcal{F}(E,F)$ et F^E.
Famille d'éléments d'un ensemble.	
Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble.	Notation $\mathbb{1}_A$.
Restriction et prolongement.	Notation $f\|_A$.
Image directe.	Notation $f(A)$.
Image réciproque.	Notation $f^{-1}(B)$. Cette notation pouvant prêter à confusion, on peut provisoirement en utiliser une autre.
Composition.	
Injection, surjection. Composée de deux injections, de deux surjections.	
Bijection, réciproque. Composée de deux bijections, réciproque de la composée.	Notation f^{-1}. Compatibilité de cette notation avec celle de l'image réciproque.
~~Relation d'ordre. Ordre partiel, total.~~	
d) Fonctions usuelles	
Fonctions circulaires réciproques Arcsin, Arccos, Arctan. Fonctions hyperboliques sh, ch, th.	Dérivée, variations, représentation graphique. .Les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme.