Colle 6 : Nombres complexes et applications

Proposition 1 Théorème (Trinôme cas complexe)

Soient a, b et c trois complexes avec $a \neq 0$. On considère l'équation

$$(*) \quad az^2 + bz + c = 0$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac = \delta^2$ (δ étant une racine carrée de Δ) appelé **discriminant de l'équation**.

• Si $\Delta \neq 0$, $(*)$ admet deux solutions distinctes : $\frac{-b\pm\delta}{2a}$ • Si $\Delta = 0$, $(*)$ admet une solution double $-\frac{b}{2a}$

Proposition 2 Relations coefficients-racines

z_1 et z_2 sont solutions de $az^2 + bz + c = 0$ si et seulement si $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$.
Autrement dit toute équation de degré 2 s'écrit sous la forme

$$z^2 - \sigma_1 z + \sigma_2 = 0$$

où est σ_1 la somme des solutions et σ_2 leur produit.

Définition 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-èmes de l'unité c'est-à-dire l'ensemble des complexes z qui vérifient $z^n = 1$.

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z^n = 1\} = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \mathbb{Z}\} = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in [\![0, n-1]\!]\}$$

être capable de déterminer les ensembles $\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_2, \mathbb{U}_3, \mathbb{U}_4$ et $\mathbb{U}_6$ en les décrivant à l'aide de $1, i$ et j.

Proposition 3 Caractérisation des racines n-èmes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Tout nombre complexe non nul admet exactement n racines n-èmes.

Proposition 4 Lieux géométriques (donner l'énoncé et être capable d'interpréter l'affirmation)

Soient $A(a)$ et $B(b)$ deux points distincts du plan et $r > 0$ alors
$\{M(z) \in \mathscr{P} \,|\, |z-a| = r\}$ est le cercle de centre A et de rayon r noté $\mathscr{C}(A, r)$.
$\{M(z) \in \mathscr{P} \,|\, |z-a| = |z-b|\}$ est la médiatrice du segment $[AB]$.
$\left\{M(z) \in \mathscr{P} \,\middle|\, \arg\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right) \equiv 0\,[\pi]\right\}$ est la droite (AB) privée des points A et B.
$\left\{M(z) \in \mathscr{P} \,\middle|\, \arg\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\,[\pi]\right\}$ est le cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B.

Proposition 5 Expressions complexes des transformations usuelles

Donner tous les énoncés, démontrer le résultat pour rotation ou homothétie, au choix de l'interrogateur)
• Soit $b \in \mathbb{C}$. L'application $t : z \mapsto z + b$ définit géométriquement la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe b.
• Soit $k \in \mathbb{R}^*$. L'application $h : z \mapsto k(z-\omega) + \omega$ définit l'homothétie de rapport k et de centre Ω d'affixe ω.
• Soit $\theta \in \mathbb{R}^*$. L'application $rz \mapsto e^{i\theta}(z-\omega) + \omega$ définit la rotation d'angle θ et de centre Ω d'affixe ω.
• $z \mapsto \bar{z}$ définit géométriquement la réflexion d'axe (Ox).

Proposition 6 Reconnaître les similitudes directes

Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ alors l'application $z \mapsto az+b$ correspond à l'expression complexe

- De la translation du vecteur d'affixe b lorsque $a=1$
- De la composée d'une rotation d'angle congru à $\arg(a)$, et d'une homothétie de rapport $|a|$ de même centre Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$. Ces deux transformations commutent.

Définition 2 Injection et surjection

Soit $f : E \to F$.
f est injective $\Leftrightarrow \left(\forall (x,y) \in E^2, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y\right) \quad \Leftrightarrow (\forall y \in F$, y admet au plus un antécédent par f
f est surjective $\Leftrightarrow (\forall y \in F, \exists x \in E / f(x) = y) \Leftrightarrow (\forall y \in F, y$ admet au moins un antécédent par $f)$
Donner un exemple de fonction injective, de fonction non-injective, de fonction surjective, de fonction non-surjective.

Proposition 7 Compositions et injections

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$, alors

- Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective
- Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective

À savoir faire

- ☐ Savoir interpréter géométriquement une application de la forme $z \mapsto az+b$, avec $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.
- ☐ Résoudre une équation du second degré à coefficients complexes.
- ☐ Déterminer l'ensemble des racines n^{emes} d'un nombre complexe
- ☐ Utiliser la formule de Moivre pour transformer une expression de la forme $\cos(n\theta)$ ou $\sin(n\theta)$ en un polynôme en $\cos\theta$ ou $\sin\theta$.
- ☐ Utiliser les formules d'Euler pour linéariser une expression de la forme $\cos^k(\theta)$ ou $\sin^k(\theta)$
- ☐ Calculs élémentaires avec des complexes : additions, produits et quotients sous forme algébrique, produits, quotients et puissances sous forme trigonométrique, passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique et réciproquement.

Le programme officiel

Nombres complexes

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
h) Interprétation géométrique des nombres complexes	
Interprétation géométrique des module et arguments de $\dfrac{c-a}{b-a}$.	Traduction de l'alignement, de l'orthogonalité.
Interprétation géométrique des applications $z \mapsto az+b$ pour $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.	Similitudes directes. Cas particuliers : translations, homothéties, rotations.
Interprétation géométrique de la conjugaison.	L'étude générale des similitudes est hors programme.
c) Applications et relations (de "Raisonnement et vocabulaire ensembliste")	
Application d'un ensemble dans un ensemble. Graphe d'une application.	Le point de vue est intuitif : une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F. Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application. Notations $\mathcal{F}(E,F)$ et F^E.
Famille d'éléments d'un ensemble.	
Image directe.	Notation $f(A)$.
Image réciproque.	Notation $f^{-1}(B)$. Cette notation pouvant prêter à confusion, on peut provisoirement en utiliser une autre.
Composition.	
Injection, surjection. Composée de deux injections, de deux surjections.	