DS n°2.

Durée : 4 heures

L'évaluation se faisant principalement sur la qualité de la rédaction, vous soignerez la précision et la concision des arguments que vous avancerez au cours des démonstrations ainsi que la présentation de vos résultats en les encadrant ou les soulignant.
Vous n'oublierez pas de faire une marge à gauche sur chaque feuille, de bien inscrire le numéro des exercices ainsi que de numéroter vos copies avant de les rendre.

La calculatrice est interdite.

Exercice 1 : Questions indépendantes

1. Résoudre l'inéquation $|2x-7| \leqslant |x+3|$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. Résoudre l'équation $\cos(2x) = \frac{1}{2}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. Résoudre l'équation $\cos(2x) = \cos(x)^2$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
4. Donner la définition de l'ensemble $\mathbb{U}_n$, rappeler le nombre d'éléments qu'il contient ainsi que la valeur de ces éléments.

Exercice 1 : Trigonométrie

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation
$$(E) \quad \tan(2x) = 3\tan(x)$$
2. Résoudre dans $[0, 2\pi]$ l'inéquation
$$(I) \quad 1 + \cos(x) > \sqrt{3}\sin x$$

Exercice 2 : Étude d'une fonction

On appelle cotangente hyperbolique la fonction coth définie par

$$\coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

1. Continuité et limites
   (a) Préciser l'ensemble de définition D de coth, puis étudier sa continuité et sa dérivabilité.
   (b) Étudier la parité de coth.
   (c) Montrer que pour tout $x \in D$, $\coth(x) = \frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$.
   (d) En déduire les limites de coth aux bornes de D. Quelles conséquences géométriques peut-on en tirer sur la courbe représentative Γ de coth ?
2. Étude des variations
   (a) Calculer la dérivée de coth et étudier son signe.
   (b) Dresser le tableau de variations.
   (c) Donner une allure de Γ.

Exercice 3 : Somme trigonométrique

1. Linéariser $\cos^4(\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. En déduire la somme $\sum_{k=0}^{n} \cos^4(k\theta)$.

Exercice 4 : Sinus hyperbolique

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On pose $f(x) = e^{\operatorname{sh}(x)} - x - 1$ et pour tout $n \geqslant 2$,

$$S_n = \sum_{k=n}^{np} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{k}\right)$$

1. Montrer que l'équation $2\operatorname{sh}(x) + 1 = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. Notons a cette solution.

2. Montrer que pour tout réel x, $\operatorname{ch}^2(x) + \operatorname{sh}(x) \geqslant 0$.

3. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

4. Démontrer que
$$\forall x \in \,]0,1[\,,\ 1 + x \leqslant e^{\operatorname{sh}(x)} \leqslant \frac{1}{1-x}$$

5. En déduire que
$$\forall n \geqslant 2,\ \ln\left(\frac{np+1}{n}\right) \leqslant S_n \leqslant -\ln\left(\frac{n-1}{np}\right)$$

6. Déterminer alors la limite de (S_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Problème : calcul de $\sin(\frac{\pi}{7})$

1. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, exprimer $\sin(7\theta)$ sous la forme $P(X)$ où P est un polynôme et $X = \sin(\theta)$ (Question difficile)

2. Quelle est la parité du polynôme P ? (remarque : il est possible de répondre à cette question sans avoir trouvé P. Si vous avez trouvé P, cela peut servir de vérification)

3. Que peut-on dire de $P(1)$? (remarque : il est possible de répondre à cette question sans avoir trouvé P. Si vous avez trouvé P, cela peut servir de vérification)

4. On admet que le polynôme
$$-64X^3 + 112X^2 - 56X + 7$$
admet 3 racines, toutes comprises entre 0 et 1. On les note r_1, r_2 et r_3 dans l'ordre croissant, c'est à dire
$$0 < r_1 < r_2 < r_3 < 1$$
(Remarque : ces nombres ont une expression très compliquée qu'on ne cherchera pas à trouver).
Que peut-on dire de $\sin(\frac{\pi}{7})$?

5. Même question pour $\sin(\frac{3\pi}{7})$

6. Même question pour $\sin(\frac{5\pi}{7})$

7. Conclure en exprimant les valeurs de $\sin(\frac{\pi}{7})$, $\sin(\frac{3\pi}{7})$ et $\sin(\frac{5\pi}{7})$ en fonction de r_1, r_2 ou r_3.