

DM n°2.**1 Calcul de $\cos \frac{\pi}{5}$.**

Soit l'équation (E) : $z^5 - 1 = 0$.

1. Donner les cinq racines de (E) sous forme trigonométrique.

2. On va maintenant résoudre (E) à l'aide de racines carrées.

(a) Déterminer la fonction polynomiale Q telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$z^5 - 1 = (z - 1)Q(z)$$

(b) Déterminer des réels a, b, c tels que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:

$$\frac{Q(z)}{z^2} = a \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + b \left(z + \frac{1}{z}\right) + c$$

(c) Résoudre, en exprimant les solutions à l'aide de racines carrées, l'équation :

$$aZ^2 + bZ + c = 0$$

d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$.

(d) Pour finir, résoudre l'équation $Q(z) = 0$ en exprimant les solutions à l'aide de racines carrées, éventuellement superposées.

3. Des questions précédentes, déduire des expressions à l'aide de racines carrées de :

$$\cos \frac{2\pi}{5}, \cos \frac{4\pi}{5}, \cos \frac{\pi}{5}, \sin \frac{2\pi}{5}, \sin \frac{4\pi}{5} \text{ et } \sin \frac{\pi}{5}$$

2 Cosinus hyperbolique

1. La fonction ch est-elle strictement monotone sur \mathbb{R} ?

2. Sur quel intervalle contenant 1 et le plus grand possible peut-on affirmer que ch est strictement monotone ?

3. Appliquer le théorème de la bijection puis conclure que la fonction ch admet une réciproque que l'on notera Argch .

4. Donner l'ensemble de définition de Argch

5. Sur quel ensemble Argch est-elle dérivable ? Donner alors l'expression de sa dérivée.

6. Tracer sur un même graphique les graphes des fonctions ch et Argch

7. Soit $y \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $\text{ch}(x) = y$ en exprimant les solutions à l'aide de la fonction \ln lorsqu'il y en a (préciser les valeurs de y pour lesquelles il y a des solutions et donner leurs nombres.)