Correction du DS n°2.

Durée : 4 heures

Exercice 1 : Questions indépendantes

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on distinguera les 3 cas suivants : $x \leq -3$, puis $x \in]-,3]$, $\frac{7}{2}$ puis $x > \frac{7}{2}$
   Si $x \leq -3$ alors $|2x-7| \leqslant |x+3| \Leftrightarrow -2x+7 \leqslant -x-3 \Leftrightarrow 10 \leq x$ ce qui n'est jamais possible dans ce cas.
   Si $-3 < x \leq \frac{7}{2}$ alors $|2x-7| \leqslant |x+3| \Leftrightarrow -2x+7 \leqslant x+3 \Leftrightarrow 4 \leq 3x$ ce qui est donc vérifié si et seulement si $x \in [\frac{4}{3}, \frac{7}{2}]$
   Si $x \leq \frac{7}{2}$ alors $|2x-7| \leqslant |x+3| \Leftrightarrow 2x-7 \leq x+3 \Leftrightarrow x \leq 10$ ce qui est vérifié si et seulement si $x \in]\frac{7}{2}, 10]$ Conclusion :
$$\mathcal{S} = \left[\frac{4}{3}, 10\right]$$

2. $\cos(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos(\frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow 2x \equiv \pm\frac{\pi}{3}[2\pi] \Leftrightarrow x \equiv \pm\frac{\pi}{6}[\pi]$
$$\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{-\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} = (\{\frac{\pi}{6}\} + \pi\mathbb{Z} \cup (\{-\frac{\pi}{6}\} + \pi\mathbb{Z}))$$

3. $\cos(2x) = \cos(x)^2 \Leftrightarrow 2\cos^2(x) - 1 = \cos^2(x) \Leftrightarrow \cos(x) = \pm 1 \Leftrightarrow x \equiv 0[2\pi]$ ou $\pi[2\pi] \Leftrightarrow x \equiv 0[\pi]$ donc
$$\mathcal{S} = \pi\mathbb{Z}$$

4. $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} / z^n = 1\}$ est constitué de n complexes qui sont tous de la forme $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$

Exercice 2 : Trigonométrie

1. (E) est définie ssi $2x \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\,[\pi]$ et $x \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\,[\pi]$ ssi $x \not\equiv \dfrac{\pi}{4}\,\left[\dfrac{\pi}{2}\right]$ et $x \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\,[\pi]$

$$(E) \Longleftrightarrow \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = 3\tan x \Leftrightarrow 2\tan x - 3\tan x(1-\tan^2 x) = 0 \Longleftrightarrow \tan x(3\tan^2 x - 1) = 0$$
$$\Longleftrightarrow \tan x = 0 \quad \text{ou} \quad \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{ou} \quad \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\Longleftrightarrow x \equiv 0\,[\pi] \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{6}\,[\pi] \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{6}\,[\pi]$$

   Toutes les valeurs trouvées sont bien dans l'ensemble de définition.

   Conclusion : $\boxed{(E) \Longleftrightarrow x \equiv 0\,[\pi] \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{6}\,[\pi] \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{6}\,[\pi]}$

2. $(I) \Longleftrightarrow \cos x - \sqrt{3}\sin x > -1 \Longleftrightarrow \dfrac{1}{2}\cos x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x > -\dfrac{1}{2} \Longleftrightarrow \cos\dfrac{\pi}{3}\cos x - \sin\dfrac{\pi}{3}\sin x > -\dfrac{1}{2}$
$$\Longleftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) > -\frac{1}{2} \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x + \frac{\pi}{3} < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, -\pi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

   Sur $[0, 2\pi]$, $\boxed{(I) \Longleftrightarrow x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right[\cup]\pi, 2\pi]}$

Exercice 3 : Étude d'une fonction

1. Continuité et limites

   (a) coth est définie ssi $e^x \neq e^{-x}$. Or $e^x = e^{-x} \iff e^{2x} = 1 \iff x = 0$.
   Donc coth est définie ssi $x \neq 0$ et $\boxed{D = \mathbb{R}^*}$.
   coth est dérivable et donc continue sur D par composition de fonctions dérivables sur D.

   (b) D est symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in D$, $\coth(-x) = \frac{e^{-x}+e^x}{e^{-x}-e^x} = -\coth(x)$ donc $\boxed{\text{coth est impaire}}$.

   (c) Pour tout $x \in D$, $\coth(x) = \frac{e^x\left(1+e^{-2x}\right)}{e^x\left(1-e^{-2x}\right)} = \frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}}$ et $\coth(x) = \frac{e^{-x}\left(e^{2x}+1\right)}{e^{-x}\left(e^{2x}-1\right)} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$.

   (d) • $\lim_{x\ +\infty} \coth(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = 1$ car $\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$.
   La droite (Δ) d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe en $+\infty$.
   • $\lim_{x\to-\infty} \coth(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} = -1$ car $\lim_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$.
   La droite (Δ') d'équation $y = -1$ est asymptote horizontale à la courbe en $-\infty$.
   • $\lim_{x\to 0^+} \coth(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = +\infty$ car $\lim_{x\to 0^+} \left(1-e^{-2x}\right) = 0^+$ car $e^{-2x} \leqslant 1$ pour $x \geqslant 0$.
   $\lim_{x\to 0^-} \coth(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = -\infty$ car $\lim_{x\to 0^-} \left(1-e^{-2x}\right) = 0^-$ car $e^{-2x} \geqslant 1$ pour $x \leqslant 0$.
   L'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe en 0.

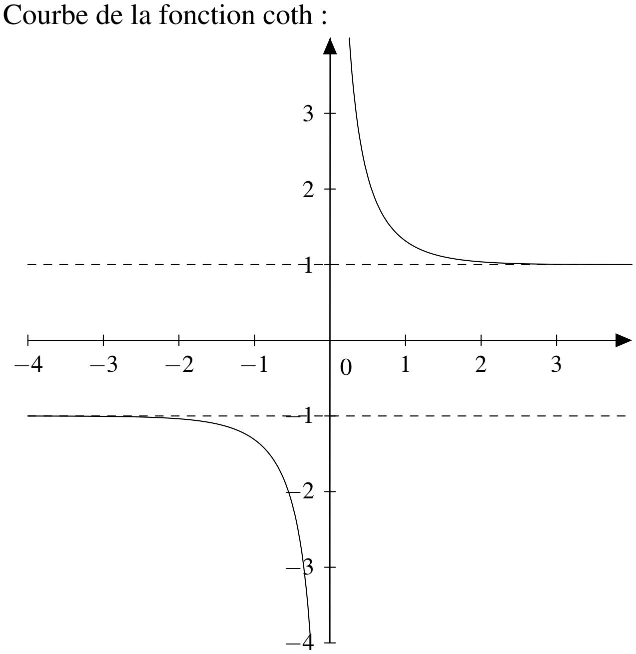
2. Étude des variations

   (a) Pour tout $x \in D$, $\coth'(x) = -\frac{4}{(e^x-e^{-x})^2} < 0$

   (b) Tableau de variations

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\coth'(x)$	$-$	‖	$-$
$\coth(x)$	$-1 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow -1$

   (c) Courbe de la fonction coth :



Exercice 4 : Somme trigonométrique

1. $\cos^4(\theta) = \left(\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^4 = \dfrac{1}{16}\left(e^{4i\theta}+4e^{2i\theta}+6+4e^{-2i\theta}+4e^{-4i\theta}\right)$

   Soit $\boxed{\cos^4(\theta) = \dfrac{1}{8}\cos(4\theta)+\dfrac{1}{2}\cos(2\theta)+\dfrac{3}{8}}$.

2. L'énoncé initial était : Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos^4(k\theta)$ pour $\theta \in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

   $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos^4(k\theta) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{8}\cos(4k\theta)+\frac{1}{2}\cos(2k\theta)+\frac{3}{8}\right) = \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{Re}\left(e^{i4k\theta}\right)+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{Re}\left(e^{i2k\theta}\right)+\sum_{k=0}^{n}\frac{3}{8}$

   $\displaystyle= \frac{1}{8}\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}(e^{4i\theta})^k\right)+\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}(e^{2i\theta})^k\right)+\frac{3}{8}(n+1)$

   Si $\theta \in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ alors $4\theta \in]0,2\pi[$ et $2\theta \in]0,\pi[$ donc $e^{4i\theta} \neq 1$ et $e^{2i\theta} \neq 1$

   $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos^4(k\theta) = \frac{1}{8}\mathrm{Re}\left(\frac{1-e^{4i(n+1)\theta}}{1-e^{4i\theta}}\right)+\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{1-e^{2i(n+1)\theta}}{1-e^{2i\theta}}\right)+\frac{3}{8}(n+1)$

   $\displaystyle= \frac{1}{8}\mathrm{Re}\left(\frac{e^{2i(n+1)\theta}}{e^{2i\theta}}\frac{e^{-2i(n+1)\theta}-e^{2i(n+1)\theta}}{e^{-2i\theta}-e^{2i\theta}}\right)+\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{e^{i(n+1)\theta}}{e^{i\theta}}\frac{e^{-i(n+1)\theta}-e^{i(n+1)\theta}}{e^{-i\theta}-e^{i\theta}}\right)+\frac{3}{8}(n+1)$

   $\displaystyle= \frac{1}{8}\mathrm{Re}\left(e^{2ni\theta}\frac{\sin(2(n+1)\theta)}{\sin(2\theta)}\right)+\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(e^{in\theta}\frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}\right)+\frac{3}{8}(n+1)$

   soit $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos^4(k\theta) = \frac{1}{8}\cos(2n\theta)\frac{\sin(2(n+1)\theta)}{\sin(2\theta)}+\frac{1}{2}\cos(n\theta)\frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}+\frac{3}{8}(n+1)}$.

Exercice 5 : Sinus hyperbolique

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On pose $f(x) = e^{\mathrm{sh}(x)}-x-1$ et pour tout $n \geqslant 2$,

$$S_n = \sum_{k=n}^{np}\mathrm{sh}\left(\frac{1}{k}\right)$$

1. $\sqrt{\dfrac{x+a}{b}} \leqslant 1 \Longleftrightarrow 0 \leqslant \dfrac{x+a}{b} \leqslant 1 \Longleftrightarrow 0 \leqslant x+a \leqslant b \Longleftrightarrow \boxed{-a \leqslant x \leqslant b-a}$.

2. f est définie ssi $\sqrt{\dfrac{x+a}{b}} \leqslant 1$ et $\sqrt{\dfrac{x-a}{b}} \leqslant 1$ ssi $-a \leqslant x \leqslant b-a$ et $a \leqslant x \leqslant b+a$ d'après 1.

   Or $b > 2a$ donc $b-a > a$ d'où $-a \leqslant a < b-a \leqslant b+a$. On obtient finalement que $\boxed{f \text{ est définie sur } [a,b-a]}$.

3. Comme les fonctions racine carrée et arcsinus sont strictement croissantes sur leurs ensembles de définition, on en déduit que $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } [a,b-a]}$.

   De plus f est continue sur $[a,b-a]$, c'est donc une bijection de $[a,b-a]$ dans $[f(a),f(b-a)]$.

   Or $[f(a),f(b-a)] = \left[\mathrm{Arcsin}\sqrt{\dfrac{2a}{b}},\dfrac{\pi}{2}+\mathrm{Arcsin}\sqrt{\dfrac{b-2a}{b}}\right]$.

Comme $0 \leqslant \dfrac{2a}{b} < 1$ d'où $\operatorname{Arcsin}\sqrt{\dfrac{2a}{b}} < \dfrac{\pi}{2}$. De même $b-2a > 0$ donc $\operatorname{Arcsin}\sqrt{\dfrac{b-2a}{b}} > 0$.

On en déduit donc que $\dfrac{\pi}{2} \in \left[\operatorname{Arcsin}\sqrt{\dfrac{2a}{b}}, \dfrac{\pi}{2} + \operatorname{Arcsin}\sqrt{\dfrac{b-2a}{b}}\right]$ et d'après le théorème de la bijection que $\boxed{\text{l'équation } f(x) = \dfrac{\pi}{2} \text{ admet une unique solution}}$.

4. $\sin^2(\alpha) + \sin^2(\beta) = \sin^2\alpha + \sin^2\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)$ donc $\boxed{\sin^2(\alpha) + \sin^2(\beta) = 1}$

5. $x_{a,b}$ est défini par : $\operatorname{Arcsin}\sqrt{\dfrac{x_{a,b}+a}{b}} + \operatorname{Arcsin}\sqrt{\dfrac{x_{a,b}-a}{b}} = \dfrac{\pi}{2}$.

   D'après la question précédente, on a alors $\sin^2\left(\operatorname{Arcsin}\sqrt{\dfrac{x_{a,b}+a}{b}}\right) + \sin^2\left(\operatorname{Arcsin}\sqrt{\dfrac{x_{a,b}-a}{b}}\right) = 1$

   soit $\dfrac{x_{a,b}+a}{b} + \dfrac{x_{a,b}-a}{b} = 1$ d'où $\boxed{x_{a,b} = \dfrac{b}{2}}$: On remarque que $x_{a,b}$ ne dépend pas de a.

Problème : calcul de $\sin(\frac{\pi}{7})$

1. On a $\sin(7\theta) = Im((\cos(\theta)+i\sin(\theta))^7)$ que l'on développe à l'aide du binôme de Newton
$\sin(7\theta) = Im\left(\cos^7(\theta)+7i\cos^6(\theta)\sin(\theta)-21\cos^5(\theta)\sin^2(\theta)-35i\cos^4(\theta)\sin^3(\theta)+35\cos^3(\theta)\sin^4(\theta)+21i\cos^2(\theta)\sin^5(\theta)-\right.$
donc $\sin(\theta) = 7\cos^6(\theta)\sin(\theta)-35\cos^4(\theta)\sin^3(\theta)+21\cos^2(\theta)\sin^5(\theta)-\sin^7(\theta)$ Comme $X = \sin(\theta)$ et $\cos^2(\theta) = 1-X^2$ on trouve
$$\sin(7\theta) = 7X(1-X^2)^3-35X^3(1-X^2)^2+21X^5(1-X^2)-X^7$$
en développant cela donne $\sin(7\theta) = 7X(-X^6+3X^4-3X^2+1)-35X^3(X^4-2X^2+1)+21X^5(-X^2+1)-X^7$
$$\sin(7\theta) = -64X^7+112X^5-56X^3+7X$$

2. On a $X(\theta) = \sin(\theta)$ (on explicite la dépendance de X en la variable θ). Mais comme sin est impaire, on a $X(-\theta) = -X(\theta)$
On a ainsi $\sin(-7\theta) = P(X(-\theta)) = P(-X(\theta))$ mais aussi $\sin(-7\theta) = -\sin(7\theta) = -P(X(\theta))$, donc on a $P(-X) = -P(X)$ (ceci est valable pour tous les réels s'exprimant comme le cosinus d'un angle, i.e. pour tous les $X \in [-1,1]$, mais l'égalité est donc vrai pour les 2 polynômes)
Ceci permet de confirmer le résultat de la première question car on y avait trouvé un polynôme s'exprimant exclusivement à l'aide des puissances impaires de X

3. En considérant $\theta = \frac{\pi}{2}$ on a $X = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ et comme $\sin(7\theta) = \sin(\frac{7\pi}{2}) = -1$ on en déduit que $P(1) = -1$.
Avec le polynôme trouvé à la question 1, on avait
$$P(1) = -64+112-56+7 = -1$$
ce qui permet de confirmer le résultat

4. On pose $a = \sin(\frac{\pi}{7})$, alors $\sin(\frac{7\pi}{7}) = -64a^7+112a^5-56a^3+7a = a(-64a^6+112a^4-56a^2+7)$
Comme $\sin(\pi) = 0$ on en déduit que $a(-64a^6+112a^4-56a^2+7) = 0$, mais par ailleurs $0 < \frac{\pi}{7} < \pi$ donc $\sin(\pi/7) \neq 0$ ainsi $-64a^6+112a^4-56a^2+7 = 0$. On pose enfin $A = a^2$ et on constate que
$$-64A^3+112A^2-56A+7 = 0$$
On a donc $A \in \{r_1,r_2,r_3\}$, i.e. $a^2 \in \{r_1,r_2,r_3\}$ comme ces 3 valeurs sont positives, il y a 6 valeurs possibles pour a : $a \in \{\pm\sqrt{r_1},\pm\sqrt{r_2},\pm\sqrt{r_3}\}$, mais comme $\sin(\pi/7) > 0$ on peut en déduire que $a \in \{\sqrt{r_1},\sqrt{r_2},\sqrt{r_3}\}$

5. On fait le même raisonnement en posant $b = \sin(\frac{3\pi}{7})$ car $\sin(3\pi) = -64b^7+112b^5-56b^3+7b = b(-64b^6+112b^4-56b^2+7)$ mais $\sin(3\pi) = 0$, or comme $b > 0$ (car sinus d'un angle compris entre 0 et π) on en déduit que $-64b^6+112b^4-56b^2+7 = 0$ et donc $-64B^3+112B^2-56B+7 = 0$ ainsi $B \in \{r_1,r_2,r_3\}$, i.e. $b^2 \in \{r_1,r_2,r_3\}$ comme ces 3 valeurs sont positives, il y a 6 valeurs possibles pour b : $b \in \{\pm\sqrt{r_1},\pm\sqrt{r_2},\pm\sqrt{r_3}\}$, mais comme $\sin(3\pi/7) > 0$ on peut en déduire que $b \in \{\sqrt{r_1},\sqrt{r_2},\sqrt{r_3}\}$

6. De la même manière on en déduit que $c = \sin(5\pi/7)$ vérifie $c \in \{\sqrt{r_1},\sqrt{r_2},\sqrt{r_3}\}$

7. On constate que $c = \sin(5\pi/7) = \sin(\pi-\frac{2\pi}{7}) = \sin(2\pi/7)$. On sait que sin est strictmeent croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ or $0 < \frac{\pi}{7} < \frac{2\pi}{7} < \frac{3\pi}{7} < \frac{\pi}{2}$ donc $\sin(\frac{\pi}{7}) < \sin(\frac{2\pi}{7}) < \sin(frac3\pi7)$ i.e. $a < c < b$.
<u>Conclusion</u>
$$a = \sqrt{r_1}, b = \sqrt{r_3} \text{ et } c = \sqrt{r_2}$$