Correction du DM n°2.

1 Calcul de $\cos\frac{\pi}{5}$.

Soit l'équation $(E) : z^5-1=0$.

1. $z^5=1 \Longleftrightarrow z=e^{i\frac{2ik\pi}{5}}$ avec $k\in[\![-2,2]\!]$.

2. (a) $z^5-1=(z-1)(-z^4+az^4+bz^3+cz^2+dz+1)=z^5+(a-1)z^4+(b-a)z^3+(c-b)z^2+(1-c)z-1$
$\Longleftrightarrow \begin{cases} a-1=0\\ b-a=0\\ c-b=0\\ 1-c=0\end{cases} \Longleftrightarrow a=b=c=1.$
On pose donc $\boxed{Q(z)=z^4+z^3+z^2+z+1}$.

 (b) Pour tout $z\in\mathbb{C}^*$, $\dfrac{Q(z)}{z^2}=\dfrac{z^4+z^3+z^2+z+1}{z^2}=z^2+z+1+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2}$.
Or $a\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2+b\left(z+\dfrac{1}{z}\right)+c=a\left(z^2+2+\dfrac{1}{z^2}\right)+b\left(z+\dfrac{1}{z}\right)+c=az^2+bz+(2a+c)+\dfrac{b}{z}+\dfrac{a}{z^2}$
Il suffit donc de prendre $a=b=1$ et $2a+c=1$ soit $c=-1$.

 (c) $Z^2+Z-1=0 \Longleftrightarrow \Delta=(\sqrt{5})^2$ soit $\boxed{Z=-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } Z=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$.

 (d) $Q(z)=0 \Longleftrightarrow \dfrac{Q(z)}{z^2}=0$ car 0 n'est pas solution de l'équation.
$\Longleftrightarrow \begin{cases} Z=z+\frac{1}{z}\\ Z^2+Z-1=0\end{cases} \Longleftrightarrow z+\dfrac{1}{z}=-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\ (1) \text{ ou } z+\dfrac{1}{z}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\ (2)$
$(1) \Longleftrightarrow z^2+\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)z+1=0$
$\Longleftrightarrow \Delta=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-4=\dfrac{2\sqrt{5}-10}{4}<0$ donc $\Delta=\left(i\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}\right)^2$
$$\boxed{z=-\frac{1+\sqrt{5}+i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}=z_1 \quad \text{ou} \quad z=-\frac{1+\sqrt{5}-i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}=z_2}$$
$(2) \Longleftrightarrow z^2+\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)z+1=0$
$\Longleftrightarrow \Delta=\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2-4=-\dfrac{2\sqrt{5}+10}{4}<0$ donc $\Delta=\left(i\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}\right)^2$
$$\boxed{z=-\frac{1-\sqrt{5}+i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}=z_3 \quad \text{ou} \quad z=-\frac{1-\sqrt{5}-i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}=z_4}$$
Conclusion : $\boxed{Q(z)=0 \Longleftrightarrow z\in\{z_1,z_2,z_3,z_4\}}$.

3. Or $Q(z)=0 \Longleftrightarrow z^5=1$ et $z\neq 1$ donc $Q(z)=0 \Longleftrightarrow z\in\{e^{-\frac{4i\pi}{5}},e^{-\frac{2i\pi}{5}},e^{\frac{2i\pi}{5}},e^{\frac{4i\pi}{5}}\}$.

 De plus, $0<\dfrac{2\pi}{5}<\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{4\pi}{5}<\pi$ donc $\boxed{\cos\dfrac{4\pi}{5}<0<\cos\dfrac{2\pi}{5}}$ car cos est strictement décroissante sur $[0,\pi]$. $\cos\dfrac{\pi}{5}=$

$\cos\left(\pi - \frac{4\pi}{5}\right) = -\cos\frac{4\pi}{5}$ et $\sin\frac{\pi}{5} = \sin\left(\pi - \frac{4\pi}{5}\right) = \sin\frac{4\pi}{5}$.

Or $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$ donc $\boxed{\sin\frac{2\pi}{5} > \sin\frac{4\pi}{5} > 0}$ car sin est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On en déduit que

$$\boxed{\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \cos\frac{4\pi}{5} = -\cos\frac{\pi}{5} = -\frac{1+\sqrt{5}}{4}, \sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \sin\frac{4\pi}{5} = \sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}$$

2 Cosinus hyperbolique

1. On a $\operatorname{ch}' = sh$ qui est strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$ et strictment négative sur $\mathbb{R}^{-*}$ donc ch est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

2. Cet intervalle est $\mathbb{R}^+$

3. ch est continue sur $\mathbb{R}^+$ qui est un intervalle et yu est strictement croissante. D'après le théroème de la bijection

   (a) $\operatorname{ch}(\mathbb{R}^+)$ est un intervalle. Comme $\operatorname{ch}(0) = 1$ et $x \underset{\lim}{\to} \infty \operatorname{ch}(x) = +\infty$ on a $\operatorname{ch}(\mathbb{R}^+) = [1, +\infty[$

   (b) ch réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $[1, _infty[$

   (c) Sa réciproque que l'on notera Argch est continue sur $[1, \infty[$

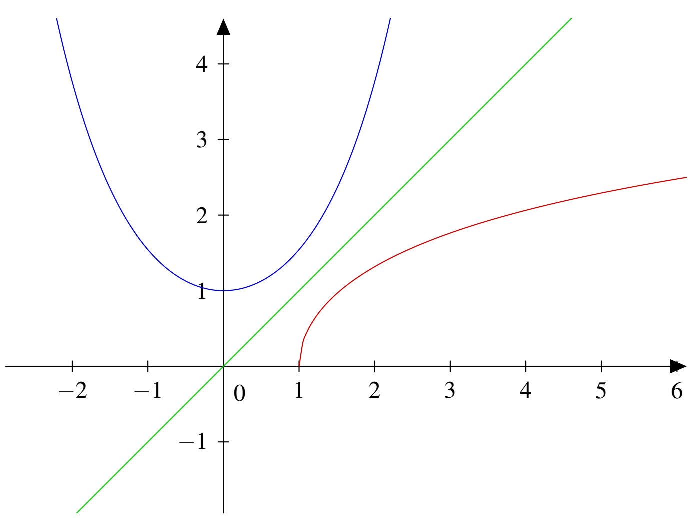
4. L'ensemble de défintion de Argch est donc $[1, \infty[$

5. On a $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$ qui ne s'annule qu'en 0. On peut ainsi appliquer le théoèrme de dérivation d'une fonction réciproque sur $\mathbb{R}^{+*}$ et l'on a $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$

$$\operatorname{Argch}'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}'(\operatorname{Argch}(x))} = \frac{1}{\operatorname{sh}(\operatorname{Argch}(x))}$$

   Mais d'après la relation $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = \tilde{1}$ on en déduit que $\operatorname{sh}(\operatorname{Argch}(x))^2 = 1 + x^2$ donc $\operatorname{sh}(\operatorname{Argch}(x)) = \pm\sqrt{1+x^2}$ de plus, comme $\operatorname{Argch}(x) \leq 1$ son sinus hyperbolique est positif, donc $\operatorname{sh}(\operatorname{Argch}(x)) = +\sqrt{1+x^2}$ et l'on conclut

$$\operatorname{Argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

6. 

7. Soit $y \in \mathbb{R}$
   - Si $y < 1$: l'équation $\operatorname{ch}(x) = y$ n'admet aucune solution, en efft ch est minorée par 1.
   - Si $y = 1$: l'équation $\operatorname{ch}(x) = y$ admet une unique solution qui est 0
   - Si $y > 1$: l'équation $\operatorname{ch}(x) = y$ équivaut à
     $e^x + e^{-x} = 2y \Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$ en multipliant par e
     On pose ensuite $x = e^x$ alors $\operatorname{ch}(x) = y \Leftrightarrow X^2 - 2yX + 1 = 0$, $\Delta = 4y^2 - 4 = 4(y^2 - 1)$ ce discriminant est strictement positif car $y > 1$, donc il y a deux solutions qui sont $\frac{2y \pm \sqrt{4(y^2-1)}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$. Ces deux solutions sont positives car
     $0 \leq y^2 - 1 < y^2$ donc $\sqrt{y^2 - 1} < y$ ainsi $y - \sqrt{y^2 - 1} > 0$

   Soit $y \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $\operatorname{ch}(x) = y$ en exprimant les solutions à l'aide de la fonction ln lorsqu'il y en a (préciser les valeurs de y pour lesquelles il y a des solutions et donner leurs nombres.) On a donc $\operatorname{ch}(x) = y$ admet deux solutions : $\ln(y - \sqrt{y^2 - 1})$ et $\ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$. Cela est tout à fait normal : ch étant paire, y possède deux antécédents opposés l'un de l'autre, donc le plus petit des deux antécédents correspond à $-\operatorname{Argch}(x)$ et le plus grand à $\operatorname{Argch}(x)$