TD 5 : Nombres complexes. Trigonométrie

Manipulations des formes algébrique et trigonométrique

Ex 1 Calculer les parties réelles et imaginaires des nombres complexes suivants :
(a) $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$ (b) $(1-i)^3$ (c) $\dfrac{(1+2i)^2-(1-i)^2}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$

Ex 2 Montrer que pour tout complexe z tel que $|z| \neq 1$, on a $\left|\dfrac{1-z^n}{1-z}\right| \leqslant \dfrac{1-|z|^n}{1-|z|}$. Reconnaître une somme de termes de suite géométrique. Utiliser l'inégalité triangulaire

Ex 3 Mettre les nombres complexes suivant sous forme trigonométrique :

1. $z_1 = 1+i, z_2 = \sqrt{3}+i$ et $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$, puis en déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}, \sin\dfrac{\pi}{12}$ et $\tan\dfrac{\pi}{12}$.
2. $\dfrac{(1+i)^5(1-i\sqrt{3})^4}{(\sqrt{3}+i)^3}$, puis en déduire sa forme algébrique.
3. $e^{i\theta_1}+e^{i\theta_2}$

Ex 4 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes

$$S_1(\theta) = \sum_{k=1}^{n} \sin(k\theta), \quad S_2(\theta) = \sum_{k=1}^{n} \cos^k(\theta)\sin(k\theta) \quad \text{et} \quad S_3(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$$

1) $sin(k\theta) = \operatorname{Im}\left(e^{ik\theta}\right)$ 2) $\cos^k(\theta)\sin(k\theta) = \operatorname{Im}\left((\cos(\theta)e^{i\theta})^k\right)$ 3)Utiliser la formule du binôme de Newton

Ex 5 Soient a et b deux complexes non nuls. Montrer que $\left|\dfrac{a}{|a|^2} - \dfrac{b}{|b|^2}\right| = \dfrac{|a-b|}{|a|\,|b|}$. Mettre au même dénominateur, et utiliser $|a|^2 = a\bar{a}$ et $|b|^2 = b\bar{b}$

Trigonométrie

Ex 6 Factoriser les expressions suivantes :

(a) $\cos^2(2x) - \cos^2(x)$

(c) $\tan(2x) - \tan(x)$

a) Identité remarquable et formule de la somme.
b)Utiliser la relation $\sin(a) = \cos(a - \frac{\pi}{2})$ c) d) Formule vue en cours (partie réelle d'une somme de termes d'une suite géométrique)

Ex 7 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations trigonométriques suivantes :

$$\sin(3x) - \sin(2x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right), \qquad \frac{\sin x + \sin(3x) + \sin(5x)}{\cos x + \cos(3x) + \cos(5x)} = 1$$

Ex 8 Soient a, b et c les mesures des angles géométriques d'un triangle non aplati.
Démontrer que si $\sin(3a) + \sin(3b) + \sin(3c) = 0$ alors au moins l'un des trois angles est égal à $\dfrac{\pi}{3}$.

Ex 9 Exprimer $\cos(4t)$ uniquement en fonction de $\cos t$. En déduire $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$.Utiliser la formule $(cos(\theta)+i\sin(\theta))^4 = \cos(4\theta) + i\sin(4\theta)$

Ex 10 Linéariser les expressions suivantes puis en déduire une primitive de fonctions associées :

$$\sin^6 x \quad \text{et} \quad 2\cos^4 x \sin^3 x + \cos^3 x \sin^2 x$$

Formule d'Euler puis binôme de Newton

Ex 11 **Calcul de la somme** $\sum_{3k=0}^{n}\binom{n}{3k}$.

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Mettre $(1+j)^n$ et $(1+j^2)^n$ sous forme trigonométrique.
2. Développer $(1+j)^n$ et $(1+j^2)^n$ à l'aide de la formule du binôme et regrouper astucieusement les termes pour calculer les sommes
$$S_0=\sum_{3k=0}^{n}\binom{n}{3k},\quad S_1=\sum_{3k+1=0}^{n}\binom{n}{3k+1},\quad \text{et}\quad S_2=\sum_{3k+2=0}^{n}\binom{n}{3k+2}$$
3. Proposer une méthode pour calculer la somme $\sum_{4k=0}^{n}\binom{n}{4k}$.

Résolutions d'équations algébriques

Ex 12 On considère le nombre complexe $z=\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}$.

1. On pose $S=z+z^2+z^4$ et $T=z^3+z^5+z^6$.
Montrer que S et T sont conjugués et que la partie imaginaire de S est positive. Faire un dessin représentant l'ensemble $\mathbb{U}_7$, S correspond à la some de 3 éléments sur les 7 de cet ensemble, T à la somme de leurs 3 conjugués.
2. Calculer $S+T$ et ST puis en déduire S et T.
Développer ; en utilisant le fait que $z^7=1$, et $1+z+z^2+..+z^6=0$, on trouve $ST=2$.

Ex 13 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(a) $z^3-(5-3i)z^2+(6-11i)z+2+16i=0$ sachant qu'il y a une racine imaginaire pure
Chercher une solution sous la forme ix avec $x\in\mathbb{R}$: identifier parties réelles et parties

(b) $z^4+6z^3+9z^2+100=0$
Mettre sous forme $z^2(z+a)^2=-100$ puis conclure

(c) $z^8=-5$
Raisonner sous forme trigonométrique

(d) $z^6-2z^3+2=0$
Poser $Z=z^3$, ne pas oublier qu'un complexe a génralement 3 racines cubiques

(e) $\bar{z}=z^5$
Forme trigonométrique

(f) $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n+\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^n=2\cos\theta$
avec $\theta\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$
Poser $\omega:=\frac{z+1}{z-1}$ et résoudre $\omega^2-2\cos(\theta)\omega+1=0$ puis conclure

(g) $(2+iz)^5=(2-iz)^5$
de deux façons différentes. Comparer les résultats
1) Voir que $\frac{2+iz}{2-iz}$ ets une racine 5-ème de l'unité.
2) Binôme de Newton, puis $zP(z^2)=0$

Ex 14 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
$$e^z=-1\quad\text{et}\quad e^z+e^{-z}+1=0$$

Pour la deuxième : poser $\omega=e^z$ puis se ramener et $\omega^2+\omega+1=0$cet conclure.

Géométrie et nombres complexes

Ex 15 Soient A,B et C trois points du plan d'affixes respectives a,b et c.
Montrer que ABC est un triangle équilatéral si et seulement si $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$.
Le triangle est équilatéral si et seulement si $AB=BC$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$ ce qui revient à connaître parfaitement $\frac{c-b}{b-a}$

Ex 16 Soient A, B, C et D quatre points du plan deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b, c et d. Interpréter géométriquement les propriétés suivantes :

(a) $a+b+c+d=0$ (b) $a-b+c-d=0$ (c) $|a+1|=2$

(d) $|a+1|=|a-2|$ (e) $\dfrac{b-a}{c-a}=i$ (f) $\dfrac{b-a}{c-a}\in\mathbb{R}^*$ (g) $\dfrac{b-a}{c-a}\in i\mathbb{R}^*$

a) Barycentre, b) Milieu de milieu c) Cercle d) Médiatrice e) Angle droit f) Angle plat g) Angle droit, avec orientation

Ex 17 Caractériser géométriquement l'ensemble des points M du plan d'affixe z qui vérifient :

(a) $|(1+i)z-2i|<1$ (b) $\left|\dfrac{iz+4+2i}{z-1+i}\right|=1$ (c) $|z-2i|=|1+i+\bar{z}|$

(d) $\dfrac{z-1}{z+i}\in i\mathbb{R}$ (e) $z=1+ai,\ a\in\mathbb{R}$ (f) $|z|=|1-z|=\left|\dfrac{1}{z}\right|$

(g) Les points d'affixes z, z^2 et z^3 forment un triangle rectangle en N d'affixe z^2 (h) Les points d'affixes $z, z-1$ et z^2 sont alignés (i) Les points d'affixes $1, z$ et z^2 sont alignés

a) cercle b) médiatrice c) Médiatrice d) Cercle privé d'un point e)droite f Intersection d'une médiatrice t d'un cercle g,h et i) Exprimer un angle entre deux vecteurs

---

Similitudes directes planes

Ex 18 Déterminer l'expression analytique de la similitude directe qui transforme les points $A(1,1)$ et $C(2,-1)$ respectivement en $B(3,-2)$ et en O. On précisera son centre, son rapport et son angle. Se ramener à un système à deux équations et deux inconnues a, b complexes.

Ex 19 Donner l'expression complexe des transformations suivantes : Cours

1. La rotation r de centre $\Omega(1-i)$ et d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}$.
2. La similitude directe s de centre $A(2i)$, de rapport 3 et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$.

Ex 20 Soit $T:\begin{array}{ccc}\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ z & \longmapsto & a^2z+a^2-a\end{array}$

1. Déterminer a pour que T soit une translation. Donner alors ses éléments caractéristiques. Il y a deux solutions
2. Déterminer a pour que T soit une rotation. T peut-elle être une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{3}$? Pour quelles valeurs a-t-on $a^2\in\mathbb{U}$? Si oui, préciser son centre.
3. Déterminer a pour que T soit une homothétie. T peut-elle être une homothétie de rapport -3? Si oui, préciser son centre. Pour quelles valeurs a-t-on $a^2\in\mathbb{R}^*$?
4. Déterminer la nature de T pour $a=1+i$. Cours

Ex 21 Soit $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ z & \longmapsto & (1-i)z+2i\end{array}$

1. Caractériser géométriquement l'application f. Déterminer : centre, rapport, angle.
2. Déterminer l'image par f de la droite d'équation : $x+2y-1=0$.
3. Déterminer l'image par f du cercle de centre $B=(0,1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.