TD 4 : Fonctions numériques

Composition

Ex 1 On définit les fonctions f_1, f_2 et f_3 par :

$$f_1(x) = e^x, \quad f_2(x) = \sqrt{x}, \quad f_3(x) = \sin(x)$$

Parmi les composées suivantes lesquelles existent ? Déterminer alors leur expression.

$$f_1 \circ f_2, \quad f_2 \circ f_1, \quad f_2 \circ f_3, \quad f_3 \circ f_2, \quad f_1 \circ f_3, \quad f_3 \circ f_1$$

Ex 2 Déterminer les ensembles de définition des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 définies par

$$f_1(x) = \ln(\ln(x)), \quad f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\ln(x)}}, \quad f_3(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+1}}, \quad f_4(x) = \ln\left(\tan\frac{\pi x}{2}\right)$$

Exprimer les quatre fonctions sous forme de composées.

Graphe et monotonie

Ex 3 Tracer rapidement en justifiant l'allure les graphes des fonctions f et g définies par

$$f(x) = \sqrt{3x-2} - 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{5}{2x+1} + 3$$

Ex 4 Trouver toutes les fonctions périodiques et monotones sur $\mathbb{R}$. Par contraposée : si une fonction non constante est périodique, alors elle va prendre deux valeurs $f(a) < (b)$ avec $a < b$ par exemple, sur une même période, ce qui l'empêchera d'être décroissante mais aussi d'être croissante, car $f(a+T) = f(a)$

Ex 5 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Prouver que si la courbe représentative de f admet deux centres de symétrie distincts sur (Ox) ou deux axes de symétrie distincts parallèle à (Oy) alors f est périodique. Utiliser les propriétés $f(a-x) = f(x)$ et $f(b-x) = f(x)$

Ex 6 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $c \in]a,b[$.
Montrer que f croît sur $[a,b]$ si et seulement si f croît sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$.
Prendre $x \leq y$ dans $[a,b]$ et traiter les 3 cas possibles En est-il de même si on remplace $[c,b]$ par $]c,b]$?

Dérivation

Ex 7 Soit f une fonction dérivable sur I un intervalle de $\mathbb{R}$. Que peut-on dire de f' si f est :
(a) paire (b) impaire (c) $T-$périodique Utiliser l'égalité fournie par la définition, et la dériver

Ex 8 Calculer les dérivées des fonctions suivantes en précisant leurs ensembles de définition et de dérivabilité :

(a) $g_1(x) = \dfrac{e^{x^2}+1}{e^{x^2}-1}$ (b) $g_2(x) = \ln(\tan^2 x + \sqrt{x})$ (c) $g_3(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)$

(d) $g_4(x) = \sqrt{\dfrac{x \sin x}{1-\cos x}}$

Ex 9 Déterminer l'ensemble de définition et les limites à ses bornes, ainsi que l'ensemble de dérivation et la dérivée des fonctions suivantes :

(a) $f_1(x) = x^{\frac{1}{x}}$ (b) $f_2(x) = x^{\ln x}$ (c) $f_3(x) = \ln(x)^{\ln(x)}$ (d) $f_4(x) = x\left|1+\dfrac{1}{x}\right|^{1+x}$

Ex 10 **Calculs de dérivées partielles**

Considérons f une fonction de plusieurs variables $x_1, \dots x_n$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$, on appelle dérivée partielle de f par rapport à x_i et on note $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ la dérivée de la fonction $x_i \mapsto f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ les autres variables étant considérées comme fixées.

1. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ si $f : (x,y,z) \mapsto (x-y)(x-z)(y-z)$.
2. Montrer que la fonction $f : (x,y) \mapsto y \ln(x^2 - y^2)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles (EDP)
$$\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f(x,y)}{y^2}$$
3. Trouver une équation aux dérivées partielles dont la fonction $f : (x,y) \mapsto \cos(x+2y)$ est solution.

Fonctions de référence

Ex 11 Donner l'ensemble de définition des fonctions définies par les expressions suivantes puis en donner une expression simplifiée :

(a) $e^{\frac{1}{2}\ln(x^2)}$ (b) $e^{\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}$ (c) $x^{\frac{1}{\ln x}}$ (d) $xe^{1-\ln x}$ (e) $\ln(xe^x) - x$

Ex 12 Représenter la fonction $f : x \mapsto |x+1| - |x| + |x-2|$.

Ex 13 Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $|x+2| + |3x-1| = 4$Distinguer trois cas : $x \leq -2$, $-2 \leq x \leq \frac{1}{3}$ et $x \geq \frac{1}{3}$
2. $|x-1| \leqslant |2x+1| + 1$distinguer deux cas
3. $x - 1 = \sqrt{x+2}$élever au carré en le justifiant correctement
4. $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-4} = 3$ Fonction décroissante (dérivée) qui en 4 vaut $\sqrt{5}$ donc est inférieure à 3
5. $\ln(x+2) + \ln(4-x) = \ln|8x-8|$ Commencer par utiliser que $\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$ pourvu que a et b soit dans $\mathbb{R}^{+*}$
6. $a^{x^2} < \left(\sqrt{a}\right)^{7x-3}$ en fonction du paramètre réel a Traiter les cas $0 \leq a < 1$, $a = 1$ et $a > 1$
7. $10^x - 10^{1-x} = 3$ Poser $z = 10^{x-1}$ et constater que l'équation revient à $10z - \frac{1}{z} = 3$
8. $7^{x+\frac{4}{3}} - 5^{3x} = 2(7^{x+\frac{1}{3}} + 5^{3x-1})$ Mettre sous la forme $a7^x = b5^{3x}$, puis appliquer le logartitme et conclure
9. $(\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}}$ Appliquer le logarithme sans oublier de justifier pourquoi cela est possible

Ex 14 Résoudre le système suivant $\begin{cases} e^x + e^y = \dfrac{7}{2} \\ e^{x+y} = \dfrac{5}{2} \end{cases}$

e^x et e^y sont les deux racines du polynômes $X^2 - \frac{7}{2}X + \frac{5}{2}$

Ex 15 Calculer les limites en $+\infty$ des expressions suivantes :

(a) $x^4 e^{-x} \ln^2 x$ (b) $\dfrac{2^x}{x^3}$ (c) $\dfrac{x^3}{e^{\sqrt{x}}}$ (d) $\dfrac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$ a) 0^+ b) $+\infty$ c) Poser $u = \sqrt{x}$ pour utiliser le T.C.C ; la limite sera 0^+ d) Utiliser l'écriture avec l'exponentielle. La limite sera 0^+

Établir une inégalité

Ex 16 Donner des encadrements (lorsque c'est possible) de $|x|, |y|, xy, |xy|, \dfrac{1}{|y|}, \dfrac{x}{y}, \dfrac{|x|}{|y|}$ et $|x+y|$ dans les deux cas suivants :

(a) $\pi \leqslant x \leqslant \frac{16}{3}$ et $-\sqrt{2} \leqslant y \leqslant -\frac{3}{4}$ (b) $-\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant \frac{2}{5}$ et $-e \leqslant y \leqslant e^{\pi}$

Ex 17 Soient x et y deux réels, montrer que

1. $|x|+|y| \leqslant |x+y|+|x-y|$
2. $1+|xy-1| \leqslant (1+|x-1|)(1+|y-1|)$

Ex 18 Démontrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leqslant |x|$.
2. $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \frac{2x}{\pi} \leqslant \sin x \leqslant x$
3. $\forall x \in [0,1], 0 \leqslant x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$ puis en déduire que $\sum_{k=0}^{n} x^k(1-x)^k \leqslant \frac{4}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sin^k\left(\frac{\pi}{6k}\right)\right| \leqslant 1$
5. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k} \leqslant 1$

Ex 19 Déterminer les valeurs du réel x pour lesquelles $x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \frac{1}{2}$.
Étudier la fonction de $[0,1] \to \mathbb{R}$, vérifier qu'elle admet un maximum en $1/2$.

Ex 20 **Calcul d'un produit infini**

1. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$. Étudier la fonction $g : x \mapsto \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$
2. En déduire $\lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k}{n^2}\right)$. Cette limite est notée $\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1+\frac{k}{n^2}\right)$. Introduire $w_n = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$

Fonctions hyperboliques

Ex 21 Résoudre les équations suivantes :

1. $3\operatorname{ch}(x)+2\operatorname{sh}(x)=7$ Écrire une équation faisant intrevenir uniquement e^x et e^{-x}, puis la multiplier par e^x. Poser ensuite $X = e^x$ et résoudre l'équation du second degré en X. Pour conclure, trouver les x réels dont l'exponentielle correspond à ces solutions ('il y en a)
2. $\operatorname{ch}^4(x) - \operatorname{sh}^4(x) = 1$ Factoriser le membre de droite, et s'apercevoir que l'un des facteurs est en fait constant égal à 1, ce qui simplifie l'équation.
3. $\operatorname{ch}^4(x) + \operatorname{ch}^3(x)\operatorname{sh}(x) - \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}^3(x) - \operatorname{sh}^4(x) = 0$

Ex 22 Résoudre le système $(\Sigma)\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = \frac{35}{12} \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = \frac{25}{12} \end{cases}$ La somme des deux lignes permet de retrouver $e^x + e^y$, la différence de retrouver $e^{-x}+e^{-y}$. Poser $a = e^x$ et $b = e^y$, on connaît alors $a+b$ et $1/a+1/b$

Ex 23 **Formules de trigonométrie hyperbolique**

1. Soient a et b deux réels. Exprimer en fonction de $\operatorname{ch}(a)$, $\operatorname{ch}(b)$, $\operatorname{sh}(a)$, $\operatorname{sh}(b)$, $\operatorname{th}(a)$ et $\operatorname{th}(b)$ les quantités : $\operatorname{ch}(a+b)$, $\operatorname{ch}(a-b)$, $\operatorname{sh}(a+b)$, $\operatorname{sh}(a-b)$, $\operatorname{th}(a+b)$ et $\operatorname{th}(a-b)$.
   Proposer une méthode pour passer des formules de trigonométrie circulaire à celles de trigonométrie hyperbolique.

2. Donner une forme linéarisée de $\operatorname{ch}^3 a$ et $\operatorname{sh}^4 a$. Formule du binôme de Newton, puis regrouper deux à deux les e^X et e^{-X}

3. Application : Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\operatorname{th}(x) = \dfrac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \dfrac{1}{\operatorname{th}(x)}$.

   Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} 2^{-k} \operatorname{th}(2^{-k}x)$ puis déterminer $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

Ex 24 Soient a et b deux réels. Calculer les sommes $S = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(a+kb)$ et $C = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \operatorname{ch}(a+kb)$. Pour S : Ecrire $\operatorname{sh}(a+kb) = \frac{1}{2}\left(e^a(e^b)^k - e^{-a}(e^{-b})^k\right)$ puis reconnaître la somme de deux suites géométriques.
Pour C : même chose, mais utiliser la formule du binôme de Newton pour conclure

Ex 25 Étudier la fonction f définie par : $f(x) = \operatorname{ch}(x \ln x)$.