Colle 3 : Fonctions numériques - Début

Preuves à connaître

Proposition 1 Transformations simples

Savoir justifier comment, à partir du graphe d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on en déduit celui de $x \mapsto -f(x)$, de $x \mapsto f(-x)$, de $x \mapsto f(x+a)$, de $x \mapsto f(-x)$, de $x \mapsto f(x)+a$ et de $x \mapsto af(x)$.

Proposition 2 Propriétés

• Soient $f : E \to \mathbb{R}, g : F \to \mathbb{R}$ et $h : G \to \mathbb{R}$ où E, F et G sont des parties de $\mathbb{R}$.
Si f est à valeurs dans F et g est à valeurs dans G alors

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

On dit que la composition est une loi **associative**.
• $f \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \circ f = f$: On dit que $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ est un **élément neutre** pour la composition.

Proposition 3 Conséquences géométriques

• Si f est paire alors sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
• Si f est impaire alors sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à 0.

Proposition 4 Opérations sur la parité

• Si f et g sont paires [resp. impaires] alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f+g$ et λf sont paires [resp. impaires].
• Le produit de deux fonctions de même parité [resp. de parité différente] est paire [resp. impaire].
Dans la définition de la parité, on n'oubliera pas de vérifier la condition portant sur l'ensemble de définition !

Proposition 5 Lien entre maximum (resp. minimum) et valeur absolue.

$$\max\{x,y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2} \quad \text{et} \quad \min\{x,y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2}$$

Proposition 6 Proposition

f est bornée sur E ssi $|f|$ est majorée sur E.

Proposition 7 Propriétés

Soient f et g deux fonctions bornées sur E.
Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f+g, \lambda f$ et $f \times g$ sont bornées sur E.

Proposition 8 Monotonie

La somme de deux fonctions croissantes [resp. décroissantes] est une fonction croissante [resp. décroissante].
Le produit de deux fonctions croissantes [resp. décroissantes] positives est une fonction croissante [resp. décroissante].
La composée de deux fonctions de même monotonie est croissante, la composée de deux fonctions de monotonie opposées est décroissante.

À savoir faire

- ☐ Établir le lien entre deux fonctions dont les graphes ont une relation géométrique particulière (exemple : symétriques par rapport à l'axe (Oy) / un graphe est le translaté de l'autre / ...)
- ☐ Montrer qu'une fonction est paire, impaire, périodique, exploiter ces informations pour retreindre l'étude et le graphe de la fonction.
- ☐ Exercices de trigonométrie

Le programme officiel

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités sur les fonctions	
Ensemble de définition.	
Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles.	Les étudiants doivent savoir déduire de la représentation graphique de f celles de fonctions obtenues par des transformations simples, comme $x \mapsto f(x+a)$ ou $x \mapsto f(ax)$.
Parité, imparité, périodicité.	Interprétation géométrique de ces propriétés. Utilisation pour la réduction du domaine d'étude.
Somme, produit, composée.	
Monotonie (large et stricte).	
Fonctions majorées, minorées, bornées.	Traduction géométrique de ces propriétés. La fonction f est bornée si et seulement si $\lvert f\rvert$ est majorée.
b) Dérivation	
Dérivée d'une fonction.	Notations $f'(x)$, $\dfrac{d}{dx}\big(f(x)\big)$.
Reste : pas encore abordé	
c) Fonctions usuelles Pas encore abordé	