Colle 2 : Trigonométrie / Techniques fondamentales en calcul algébrique.

Preuves à connaître

Proposition 1 Classes d'équivalence

Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur E.

• Pour tout $x \in E$, on appelle **classe d'équivalence** de x (modulo $\mathscr{R}$) l'ensemble

$$\mathrm{cl}(x) = \{y \in E \,|\, x \mathscr{R} y\}$$

• Les classes d'équivalences modulo $\mathscr{R}$ forment une partition de E c'est-à-dire qu'elles sont non vides, que leur réunion est E et qu'elles sont deux à deux égales ou disjointes.

Proposition 2 Angles opposés, complémentaires, différent de $\frac{\pi}{2}$, de π et supplémentaires

Pour les fonctions cosinus, sinus et tangentes, exprimer $f(-x)$, $f(\frac{\pi}{2}-x)$, $f(\frac{\pi}{2}+x)$, $f(\pi+x)$, $f(\pi-x)$ en fonction de $\cos(x), \sin(x)$ et $\tan(x)$, un dessin sera attendu pour justifier les résultats.

Proposition 3 Formules trigonométriques

Démontrer géométriquement les formules suivantes

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \text{ et } \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

Proposition 4 Autres formules trigonométriques

Savoir retrouver les formules pour $\cos(a-b)$, $\sin(a-b)$, $\tan(a+b)$ et $\tan(a-b)$ à partir de la proposition 3.

Proposition 5 Formules d'arc moitié

On pose $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Sous réserve d'existence des différentes quantités, on a

$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan\theta = \frac{2t}{1-t^2}$$

(On pourra pour cela utiliser les résultats des propositions 3 et 4)

Proposition 6 Graphiques

Savoir représenter sur un même graphique les graphes des fonctions sinus, cosinus et tangente : représenter leurs tangentes en 0 et préciser la position relative du graphe par rapport à cette tangente.

Proposition 7 Formules de transformation de produit en somme

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)) \qquad \cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a-b) + \sin(a+b))$$

Proposition 8 (Notation Amplitude/phase)

Pour tout $(a,b) \neq (0,0)$, il existe $A > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que

$$a\cos\theta + b\sin\theta = A\cos(\theta+\varphi).$$

A est appelé l'amplitude et φ la phase.

À savoir faire

- ☐ Résoudre des équations et des inéquations faisant intervenir des fonctions trigonométriques
- ☐ Déterminer si une relation binaire donnée est une relation d'équivalence ou non.
  Déterminer la classe d'équivalence d'un élément le cas échéant.
- ☐ Résoudre un système linéaire. Déterminer l'ensemble des solutions, l'écrire sous la forme : solution particulière + ensemble des solutions du système homogène associé.
- ☐ Raisonnements par analyse et synthèse ; par disjonction de cas ; par l'absurde ; par contraposition.
- ☐ Récurrence simple, double et forte pour établir qu'une propriété est vraie pour tout entier supérieur à n_0. (Par exemple, pour établir une égalité portant sur les termes d'une suite définie par récurrence)
- ☐ Calculer une somme en utilisant la linéarité et les sommes fondamentales, ou en remarquant une somme télescopique. Exprimer un produit simple à l'aide de puissances et de la factorielle.

Le programme officiel

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
d) Trigonométrie	
Cercle trigonométrique. Paramétrisation par cosinus et sinus.	
Relation de congruence modulo 2π sur $\mathbb{R}$.	Notation $a \equiv b\ [2\pi]$.
Cosinus et sinus de $\pi \pm x$, de $\frac{\pi}{2} \pm x$. Cosinus et sinus des angles usuels.	Les étudiants doivent savoir retrouver ces résultats et résoudre des équations et inéquations trigonométriques simples en s'aidant du cercle trigonométrique.
Formules d'addition $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$. Cas particulier des formules de duplication : $\cos(2a)$, $\sin(2a)$.	On présente une justification géométrique de l'une de ces formules. Les étudiants doivent savoir retrouver rapidement les formules donnant $\cos(a)\cos(b)$, $\cos(a)\sin(b)$, $\sin(a)\sin(b)$.
Fonctions circulaires cosinus et sinus.	On justifie les formules donnant les fonctions dérivées de sinus et cosinus vues en classe de terminale.
Pour $x \in \mathbb{R}$, inégalité $\lvert\sin(x)\rvert \leqslant \lvert x\rvert$.	
Fonction tangente.	Notation tan. Dérivée, variations, représentation graphique.
Tangente de $\pi \pm x$. Tangente des angles usuels.	Interprétation sur le cercle trigonométrique.
Formule d'addition $\tan(a \pm b)$.	Les étudiants doivent savoir retrouver l'expression de $\cos(t)$ et $\sin(t)$ en fonction de $\tan(t/2)$.