Colle 5 : Nombres complexes et trigonométrie.

Preuves à connaître

Proposition 1 Propriétés

$\forall (z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2$,

- $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$
- $\overline{(\overline{z_1})}=z_1$
- $\overline{z_1\times z_2}=\overline{z_1}\times\overline{z_2}$
- $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ pour tout $z_2\neq 0$

Proposition 2 Inégalité triangulaire

$\forall (z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2$,

$$||z_1|-|z_2||\leqslant |z_1+z_2|\leqslant |z_1|+|z_2|$$

si $z_1\neq 0$, on a égalité ssi $\exists\lambda\in\mathbb{R}^+$, $z_2=\lambda z_1$

Proposition 3 Démontrer à partir de la définition de $e^{i\theta}$.

Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, tout $\theta'\in\mathbb{R}$, tout $n\in\mathbb{Z}$,

$e^{i\theta}\times e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')}$ $\qquad\dfrac{1}{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}=\overline{e^{i\theta}}$ $\qquad$ et $\qquad e^{in\theta}=\left(e^{i\theta}\right)^n$.

Proposition 4 Formules de transformation de somme en produit

$\cos p+\cos q=2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$ $\qquad \cos p-\cos q=2\sin(\frac{q-p}{2})\sin(\frac{p+q}{2})$

$\sin p+\sin q=2\sin(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$ $\qquad \sin p-\sin q=2\sin(\frac{p-q}{2})\cos(\frac{p+q}{2})$

Exercice 1 Linéarisation

Linéariser $\cos^4(\theta)$.

Exercice 2 Délinéarisation

Exprimer $\sin(5\theta)$ sous le forme d'un polynôme en $\sin\theta$

Proposition 5 Calcul de sommes

Soit $\theta\in]0,2\pi[$, calculer $S_n(\theta)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)$.

Proposition 6 Proposition (Arguments et opérations)

$\forall (z,z') \in (\mathbb{C}^*)^2, \forall n \in \mathbb{Z}$

- $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$
- $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$
- $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg(z^n) \equiv n\arg(z)\ [2\pi]$

Proposition 7 Recherche des racines carrées (Méthode exponentielle)

Si $a \neq 0$, on met a et z sous forme trigonométrique et on aboutit au système

$$z^2 = a \Longleftrightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{|a|} \\ \arg(z) \equiv \dfrac{\arg(a)}{2}\ [\pi] \end{cases} \Longleftrightarrow z = \pm\sqrt{|a|}e^{i\frac{\arg(a)}{2}}$$

Exercice 3 Recherche des racines carrées (Méthode algébrique)

Trouver les racines carrés de $-16+30i$. Indication à donner : calculer 34^2

À savoir faire

- ☐ Utiliser la formule de Moivre pour transformer une expression de la forme $\cos(n\theta)$ ou $\sin(n\theta)$ en un polynôme en $\cos\theta$ ou $\sin\theta$.
- ☐ Utiliser les formules d'Euler pour linéariser une expression de la forme $\cos^k(\theta)$ ou $\sin^k(\theta)$
- ☐ Calculs élémentaires avec des complexes : additions, produits et quotients sous forme algébrique, produits, quotients et puissances sous forme trigonométrique, passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique et réciproquement.

Le programme officiel

Nombres complexes

L'objectif de cette section, que l'on illustrera par de nombreuses figures, est de donner une solide pratique des nombres complexes, à travers les aspects suivants :

- *l'étude algébrique du corps $\mathbb{C}$ et la notion d'équation algébrique ;*
- *l'interprétation géométrique des nombres complexes et l'utilisation des nombres complexes en géométrie plane ;*
- *l'exponentielle complexe et ses applications à la trigonométrie.*

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Nombres complexes

Parties réelle et imaginaire. Opérations sur les nombres complexes.	La construction de $\mathbb{C}$ est hors programme.
Brève extension du calcul de $\sum_{k=0}^{n} x^k$, de la factorisation de $a^n - b^n$, de la formule du binôme.	
Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.	On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct (« plan complexe »).

b) Conjugaison et module

Conjugaison, compatibilité avec les opérations. Module. Relation $\lvert z\rvert^2 = z\bar{z}$, module d'un produit, d'un quotient. Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	Image du conjugué dans le plan complexe. Interprétation géométrique de $\lvert z - z'\rvert$, cercles et disques.

c) Nombres complexes de module 1 et trigonométrie

Identification du cercle trigonométrique et de l'ensemble des nombres complexes de module 1. Définition de e^{it} pour $t \in \mathbb{R}$. Exponentielle d'une somme.	Notation $\mathbb{U}$.
Formules d'Euler. Technique de l'angle moitié : factorisation de $1 \pm \mathrm{e}^{it}$, de $\mathrm{e}^{ip} \pm \mathrm{e}^{iq}$.	Les étudiants doivent savoir retrouver les formules donnant $\cos(p) \pm \cos(q), \sin(p) \pm \sin(q)$. Linéarisation, calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et de $\sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$.
Formule de Moivre.	Les étudiants doivent savoir retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.

d) Forme trigonométrique

Forme trigonométrique $r\mathrm{e}^{i\theta}$ $(r > 0)$ d'un nombre complexe non nul. Arguments. Arguments d'un produit, d'un quotient.	

g) Exponentielle complexe

Définition de e^z pour z complexe: $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\Re(z)}\mathrm{e}^{\text{ß}\Im(z)}$. Exponentielle d'une somme. Pour tous z et z' dans $\mathbb{C}$, $\exp(z) = \exp(z')$ si et seulement si $z - z' \in 2\text{ß}\pi\mathbb{Z}$. Résolution de l'équation $\exp(z) = a$.	Notations $\exp(z)$, e^z. Module et arguments de e^z.