Colle 4 : Fonctions numériques.

Preuves à connaître

Proposition 1 Propriétés algébriques

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^{*}, \forall n \in \mathbb{Z}$,

$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \qquad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y) \qquad \ln(x^n) = n\ln(x)$

La fonction ln étant définie comme l'unique fonction qui s'annule en 1 et dont la dérivée est la fonction inverse

Proposition 2 Propriétés

- Pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leqslant x - 1$
- $\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$ et $\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$
- Donner l'allure du graphe de ln (préciser l'asymptote verticale en 0, la tangente en 1 ainsi que la position du graphe par rapport à cette tangente.)

Proposition 3 Propriétés algébriques de l'exponentielle

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, n \in \mathbb{Z}$,

$\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y) \qquad \exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)} \qquad \exp(nx) = \exp(x)^n$ exp étant définie comme l'unique fonction solution de $y' = y$ telle que $y(0) = 1$.

Proposition 4 Propriétés de l'exponentielle (une inégalité & une limite)

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \geqslant x + 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1$
- Donner l'allure du graphe de exp (préciser l'asymptote horizontale en $-\infty$, la tangente en 0 ainsi que la position du graphe par rapport à cette tangente.

Définition 1 Fonctions exponentielles de base a

Donner les courbes représentatives de fonctions $x \mapsto a^x$ pour différentes valeurs de $a > 0$ choisies par le colleur. Expliquer les positions relatives des graphes ainsi que leurs relations géométriques.

Définition 2 Racine n-ème d'un réel positif

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et a un réel positif.

Il existe un unique réel positif ou nul x tel que $x^n = a$. On note $x = \sqrt[n]{a}$ ou encore $x = a^{\frac{1}{n}}$ et cette notation coïncide avec $e^{\frac{\ln(a)}{n}}$. On dit que x est la racine n-ème positive du réel positif a. On a l'équivalence $\begin{cases} y = x^n \\ x \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y^{\frac{1}{n}} \\ y \geqslant 0 \end{cases}$ et les graphe de $x \mapsto x^n$ et de $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$

Définition 3 Fonctions puissances α

Donner les courbes représentatives de fonctions $x \mapsto x^\alpha$ pour différentes valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ choisies par le colleur. Expliquer les positions relatives des graphes ainsi que leurs relations géométriques.

Proposition 5 Propriétés algébriques des exponentielles de base a

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$,

$$a^{x+y} = a^x \times a^y \qquad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \qquad \ln(a^x) = x\ln(a)$$

$$(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x \qquad (ab)^x = a^x \times b^x \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

Proposition 6 Théorème de Croissances comparées Énoncer les 4, ne démontrer que le 3ème

Pour tout $\alpha > 0$, pour tout $\beta > 0$,

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^\alpha(x)}{x^\beta} = 0$
- $\lim_{x \to 0^+} x^\beta |\ln(x)|^\alpha = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} |x|^\alpha e^{\beta x} = 0$

Proposition 7 Théorème de croissances comparées

Énoncer les 4 résultats, admettre le 3ème et démontrer les autres à partir de celui-ci

Proposition 8 Fonctions hyperboliques

Donner les définitions de ch, sh et th, leurs parités respectives, leurs dérivées, monotonies (en fonction des intervalles), limites, et la propriété

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad : \quad \text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1.$$

À savoir faire

- ☐ Déterminer des limites en utilisant le théorème de croissances comparées, ou en reconnaissant des limites de taux d'accroissements (sinus et sinus hyperbolique en 0, ln en 1 etc.)
- ☐ Savoir trouver une asymptote oblique ou verticale à la courbe représentative d'une fonction.
- ☐ Montrer qu'une fonction est paire, impaire, périodique, exploiter ces informations pour retreindre l'étude et le graphe de la fonction.
- ☐ Savoir dériver un produit, une composée de fonctions de références, établir un tableau de variations.
- ☐ Déterminer un ensemble de définition, un ensemble de dérivabilité.
- ☐ Savoir manipuler des inégalités

Le programme officiel

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
c) Fonctions usuelles	
Fonctions exponentielle, logarithme népérien, puissances.	Dérivée, variations, représentation graphique. Les fonctions puissances sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur $\mathbb{R}_-^*$. Logarithme décimal, logarithme en base 2.
Relations $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$. Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle. Inégalités $\exp(x) \geqslant 1+x$, $\ln(1+x) \leqslant x$.	