

1] Analyse: $\theta_u(X) = u^n$.

$$\theta_u(\sum a_k X^k) = \sum a_k u^k.$$

Synthese: $m_f \left(\bigoplus_{k=0}^{n^2} \right) : \begin{cases} \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathcal{L}(E) \\ p = \sum a_k X^k \mapsto \sum a_k u^k \end{cases}$ est un morphisme d'algèbre.

- $\Phi(0_{\mathbb{K}[X]}) = 0$

- $\Phi(1_{\mathbb{K}[X]}) = 1 \times u^0 = \text{id}_E$

- $\Phi(\lambda P + Q) = \lambda \Phi(P) + \Phi(Q)$

- $\Phi(PQ) = \Phi(P)\Phi(Q)$

2] Comme $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie, (n^2)

la famille $(\text{id}, u, u^2, \dots, u^{n^2})$ est liée

donc il existe des coeff $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n^2}) \in \mathbb{K}^{n^2}$ non tous nuls.

tels que $\sum_{k=0}^{n^2} \alpha_k X^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$

$P(X) = \sum \alpha_k X^k$, vérifie $\theta_u(P) = \theta_u(0_{\mathcal{L}(E)})$

3] $\ker(\theta_u)$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ qui est donc un idéal principal. $\exists \mu / \ker(\theta_u) = \mu \mathbb{K}[X]$. (on peut le s-passer une fois qu'on a divisé)

on a donc $\theta_u(P) = 0 \Leftrightarrow \mu \mid P$
 i.e. $(P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}) \Leftrightarrow (\mu \mid P)$

4] $(\text{id}_E, u, \dots, u^{d-1})$ est libre car
 donc $V = 0_{\mathbb{K}[X]}$.

$\sum \alpha_k u^k = 0$ alors $P(u) = 0$.

Comme $\forall P \in \mathbb{K}[X], P = Q \mu + \underset{\in \mathbb{K}[X]}{R}$

on a $P(u) = R(u) \in \text{vect}(\text{id}_E, u, u^2, \dots, u^{d-1})$.

5] Soit $k \in \mathbb{Z}[1, n]$,
 k est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ssi $\exists u /$
 $ku = 1 + nu$
 ssi $k \wedge n = 1$.

6] $\forall k \in \mathbb{Z}[1, p^\alpha]$, $k \wedge p^\alpha = 1 \Leftrightarrow k$ n'est pas multiple de p .
 Les seuls entiers de $\mathbb{Z}[1, p^\alpha]$ non-premiers à p^α sont
 donc $p, 2p, 3p, \dots, p^\alpha$: ils sont au nb de $p^{\alpha-1}$

Donc $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$

7] Si $n = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^r (p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i-1}) = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i-1} (p_i - 1)$$

Analyse: s'il existe i tel que $\alpha_i - 1 \geq 1$ et $p_i \neq 2$

alors $p_i \mid \varphi(n)$ donc impossible

Ainsi $\alpha_i - 1 = 0$ i.e. $\alpha_i = 1$ ou $p = 2$.

Donc $n = 2^{\alpha_2} \times \prod_{i=1}^r p_i$

$$\varphi(n) = 2^{\alpha_2-1} \times \underbrace{\prod_{i=1}^r (p_i - 1)}_{\geq 3 \text{ si } p_i > 3}$$

n est donc de la forme $2^k 3^l$

$$\varphi(2^k 3^l) = (2^k - 2^{k-1}) (3^l - 3^{l-1})$$

Si $l=0$ $\varphi(2^k) = 2^{k-1}$

$\rightarrow 1, 2 \text{ ou } 4$

Si $l=1$ $\varphi(2^k \times 3) = 2 \times \varphi(2^k)$

$\rightarrow 3 \text{ ou } 6$

Si $l=2$ $\varphi(3^2) = 3^{2-1} (3-1)$ $k=0 \text{ ou } 1$

$$n = 1, 2, 3, 4, \dots, 6$$

8]
$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{2i\frac{k\pi}{n}}) = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega_n^k)$$

$\downarrow$
 $2 \text{ à } 2 \text{ distincts } \dots$
 $\omega_n^k = \omega_n^{k'}$
 $\Leftrightarrow \frac{2ik\pi}{n} \equiv \frac{2ik'\pi}{n} \pmod{2\pi}$
 $\Leftrightarrow k - k' \equiv 0 \pmod{n}$

9a) Si n est pair : ± 1
 Si n impair : 1

9b) $P_0 = X^2 - 2 \operatorname{Re}(e^{i\theta})X + 1 = X^2 - 2\cos\theta X + 1$.

irréductible car de degré 2 et sans racines réelles
 $\rightarrow$ s'il se factorisait, se serait 2 polynômes de degré 1 (qui admettraient des racines).

]

$\rightarrow$ Si n est impair $n = 2h+1$

$$X^{2h+1} - 1 = \prod_{l=-h}^{+h} (X - e^{2i\frac{l\pi}{n}}) = (X-1) \times \prod_{l=1}^h (X^2 - 2\cos(\frac{2l\pi}{n})X + 1)$$

$\rightarrow$ Si $n = 2h$

$$X^{2h} - 1 = \prod_{l=-h+1}^{h-1} (X - e^{2i\frac{l\pi}{n}}) \times (X+1)$$

$$= \underbrace{(X-1)}_{\substack{\uparrow \\ \text{irred} \\ \text{deg } 1}} \underbrace{(X+1)}_{\uparrow} \prod_{l=1}^{h-1} \underbrace{(X^2 - 2\cos(\frac{2l\pi}{n})X + 1)}_{\substack{\uparrow \\ \text{irred de deg } 2}}$$